ACTA MATHEMATICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS

G. ALEXITS, E. EGERVÁRY, P. ERDŐS, L. FEJÉR,
CH. JORDAN, L. KALMÁR, L. RÉDEI, A. RÉNYI,
B. SZ.-NAGY, P. TURÁN, O. VARGA

REDIGIT

G. HAJÓS

TOMUS VIII FASCICULI 1–2

AKADÉMIAI KIADÓ BUDAPEST

1957

ACTA MATH. HUNG.

ACTA MATHEMATICA
ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA III. OSZTÁLYÁNAK
MATEMATIKAI KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTŐSÉG ÉS KIADÓHIVATAL: BUDAPEST, V., ALKOTMÁNY U. 21

Az Acta Mathematica német, angol, francia és orosz nyelven közöl értekezéseket a matematika köréből.

Az Acta Mathematica változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, több füzet alkot egy kötetet.

A közlésre szánt kéziratok géppel írva, a következő címre küldendők:

Acta Mathematica, Budapest 62, Postafiók 440.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi és kiadóhivatali levelezés.

Az Acta Mathematica előfizetési ára kötetenként belföldre 80 forint, külföldre 110 forint. Megrendelhető a belföld számára az „Akadémiai Kiadó"-nál (Budapest, V., Alkotmány utca 21. Bankszámla 05-915-111-44), a külföld számára pedig a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalatnál (Budapest, VI., Magyar Ifjúság útja 21. Bankszámla 43-790-057-181) vagy külföldi képviseleteinél és bizományosainál.

Die Acta Mathematica veröffentlichen Abhandlungen aus dem Bereiche der mathematischen Wissenschaften in deutscher, englischer, französicher und russischer Sprache.

Die Acta Mathematica erscheinen in Heften wechselnden Umfanges. Mehrere Hefte bilden einen Band.

Die zur Veröffentlichung bestimmten Manuskripte sind an folgende Adresse zu senden:

Acta Mathematica, Budapest 62, Postafiók 440.

An die gleiche Anschrift ist auch jede für die Redaktion und den Verlag bestimmte Korrespondenz zu richten.

Abonnementspreis pro Band: 110 Forints. Bestellbar bei dem Buch- und Zeitungs-Außenhandels-Unternehmen „*Kultura*" (Budapest, VI., Magyar Ifjúság útja 21. Bankkonto Nr. 43 790-057-181) oder bei seinen Auslandvertretungen und Kommissionären.

EINE NEUE CHARAKTERISIERUNG FINSLERSCHER RÄUME SKALARER UND KONSTANTER KRÜMMUNG UND PROJEKTIV-EBENE RÄUME

Von

A. RAPCSÁK (Debrecen)

(*Vorgelegt von* O. VARGA)

Einführung

Bekanntlich ist ein Riemannscher Raum dann und nur dann von konstanter Krümmung, falls in ihm in einem beliebigen Punkt durch jede hindurchgehende Richtung eine Ebene gelegt werden kann.

Wollen wir spezielle Finslersche Räume auf eine ähnliche Weise charakterisieren, dann müssen wir vor allem eine Definition der Ebene angeben. Für den Fall transversaler Flächen hat bereits WEGENER[1] Ebenen definiert und gezeigt, daß in einem Finslerschen Raum in jedem Punkt in jeder Richtung eine Ebene gelegt werden kann, falls der Raum von verschwindender Krümmung ist.

In der vorliegenden Arbeit definieren wir Ebenen als Flächen, welche als geometrischer Ort tangentialer Linienelemente betrachtet werden können. Unter diesen Bedingungen gibt es dreierlei natürliche Definitionen der Ebene. Die Ebenen erster Art sind die totalgeodätischen Flächen, diejenigen zweiter Art, oder O. Vargasche Ebenen, sind die totalquasigeodätischen Flächen, und diejenigen dritter Art sind Ebenen, auf welchen die Normalvektoren im Sinne der Metrik des Raumes parallel sind.

Unsere Arbeit enthält drei Hauptsätze. Hauptsatz I besagt, daß in einem Finslerschen Raum zu jedem Linienelement in jeder orthogonalen Richtung dann und nur dann eine Ebene erster Art gelegt werden kann, falls derselbe projektiv-ebener und von skalarer Krümmung ist.[2]

Nach dem Hauptsatz II kann in einem Finslerschen Raum dann und nur dann zu jedem Linienelement in jeder orthogonalen Richtung eine O. Vargasche Ebene gelegt werden, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1) Der Raum ist ein projektiv-ebener Finslerscher Raum skalarer Krümmung;

[1] Siehe M. WEGENER [11], S. 122.

[2] Siehe L. BERWALD [1], S. 176.

2) $A_{\alpha\beta\gamma|0}=0$.

Endlich ist nach dem Hauptsatz III dafür, daß in einem Finslerschen Raum zu jedem Linienelement in jeder orthogonalen Richtung eine Ebene dritter Art gelegt werden kann, notwendig und hinreichend, daß der Raum ein Riemannscher Raum konstanter Krümmung ist.

Sämtliche in unserer Arbeit auftretende Größen werden als regulär-analytisch vorausgesetzt.

§ 1. Der Finslersche Raum skalarer Krümmung

Wie bekannt, ist ein Finslerscher Raum F_n eine n-dimensionale Punktmenge, für welche das „Bogenelement" durch die Funktion

$$ds=L(y, dy) \tag{1.1}$$

gegeben wird. Die Funktion L ist in dy^α positiv homogen ersten Grades, und führt zu einem regulären Variationsproblem.

Cartan[3] hat statt des n-dimensionalen Punktraumes einen $(2n-1)$-dimensionalen Linienelementenraum $(y^1, \ldots, y^n, v^1, \ldots, v^n)$ eingeführt, in welchem also jede Größe in einem Linienelement definiert ist. Der Maßtensor ist durch

$$g_{\alpha\beta}(y, v)=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 L^2}{\partial v^\alpha \partial v^\beta}\text{[4]} \tag{1.2}$$

bestimmt.

Die Länge eines Vektors $\xi^\alpha(y, v)$ bzw. der Cosinus des Winkels zwischen zwei, in demselben Linienelement definierten Vektoren $\xi^\alpha(y, v)$, $\eta^\alpha(y, v)$ wird durch die Gleichungen

$$\xi=+\sqrt{\xi_\alpha \xi^\alpha}, \tag{1.3}$$

$$\cos(\xi, \eta)=\frac{\xi_\alpha \eta^\alpha}{\sqrt{\xi_\beta \xi^\beta}\sqrt{\eta_\beta \eta^\beta}} \tag{1.4}$$

definiert.

Für das invariante Differential des Finslerschen Raumes haben wir[5]

$$D\xi^\alpha=d\xi^\alpha+\left(A^\alpha_{\beta\gamma}\,\omega^\gamma+\Gamma^{*\alpha}_{\beta\gamma}dy^\gamma\right)\xi^\beta, \tag{1.5a}$$

$$D\xi_\alpha=d\xi_\alpha-\left(A^\beta_{\alpha\gamma}\omega^\gamma+\Gamma^{*\beta}_{\alpha\gamma}dy^\gamma\right)\xi_\beta, \tag{1.5b}$$

[3] Siehe E. Cartan [2].

[4] Die griechischen Indizes laufen von 1 bis n, die lateinischen von 1 bis $(n-1)$!

[5] Für das folgende siehe z. B. E. Cartan [2].

mit

(1. 6a) $$A_{\alpha\beta\gamma} = L\, C_{\alpha\beta\gamma} = L\, \frac{1}{4} \frac{\partial^2 L^2}{\partial v^\alpha \partial v^\beta \partial v^\gamma},$$

(1. 6b) $$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial y^\gamma} + \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial y^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial y^\beta}\right) + C_{\alpha\gamma\sigma} \frac{\partial G^\sigma}{\partial v^\beta} - C_{\gamma\beta\sigma} \frac{\partial G^\sigma}{\partial v^\alpha},$$

(1. 6c) $$\Gamma^\beta_{\alpha\gamma} = g^{\beta\sigma} \Gamma_{\alpha\sigma\gamma},$$

(1. 6d) $$\Gamma^{*\alpha}_{\beta\gamma} = \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} - A^\alpha_{\beta\varrho} \Gamma^\varrho_{0\gamma},$$

(1. 6e) $$\Gamma^\varrho_{0\gamma} = \Gamma^\varrho_{\varkappa\gamma} l^\varkappa, \qquad G^\sigma = g^{\varkappa\sigma} G_\varkappa,$$

(1. 6f) $$G_\varkappa = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 L^2}{\partial v^\varkappa \partial y^\varrho} v^\varrho - \frac{\partial L^2}{\partial y^\varkappa}\right),$$

(1. 6g) $$\omega^\alpha = D l^\alpha = d l^\alpha + \frac{\partial G^\alpha}{\partial v^\varkappa} d y^\varkappa.$$

(Die Komposition mit l^α wird bei dem entsprechenden Index durch 0 bezeichnet.)

Wir werden uns des weiteren auch noch der folgenden Bezeichnungen bedienen:

(1. 7) $$D\xi^\alpha = d\xi^\alpha + \omega^\alpha_\gamma \xi^\gamma = \xi^\alpha_{|\beta} d y^\beta + \xi^\alpha_{;\beta} \omega^\beta,$$

wobei

(1. 8) $$\omega^\alpha_\gamma = A^\alpha_{\beta\gamma} \omega^\beta + \Gamma^{*\alpha}_{\beta\gamma} d y^\beta,$$

(1. 9a) $$\xi^\alpha_{|\beta} = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial y^\beta} - \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial v^\varrho} \frac{\partial G^\varrho}{\partial v^\beta} + \Gamma^{*\alpha}_{\varrho\beta} \xi^\varrho$$

und

(1. 9b) $$\xi^\alpha_{;\beta} = L \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial v^\beta} + A^\alpha_{\varrho\beta} \xi^\varrho$$

gesetzt wird.

Die Krümmungstensoren des Finslerschen Raumes sind:

(1. 10a) $$R_{\alpha\beta\gamma\varepsilon} = F_{\alpha\beta\gamma\varepsilon} + A_{\alpha\beta\varkappa} R_0{}^\varkappa{}_{\gamma\varepsilon},$$

(1. 10b) $$P_{\alpha\beta\gamma\varepsilon} = A_{\beta\gamma\varepsilon|\alpha} - A_{\alpha\gamma\varepsilon|\beta} + A_{\alpha\gamma\varkappa} A^\varkappa_{\beta\varepsilon|0} - A_{\beta\gamma\varkappa} A^\varkappa_{\alpha\varepsilon|0},$$

(1. 10c) $$S_{\alpha\beta\gamma\varepsilon} = A^\varkappa_{\beta\gamma} A_{\alpha\varepsilon\varkappa} - A_{\beta\varepsilon\varkappa} A^\varkappa_{\alpha\beta},$$

wo

(1. 11) $$R_0{}^\varkappa{}_{\gamma\varepsilon} = \frac{1}{L}\left(\frac{\partial^2 G^\varkappa}{\partial v^\gamma \partial y^\varepsilon} - \frac{\partial^2 G^\varkappa}{\partial v^\varepsilon \partial y^\gamma} - G^\varkappa_{\gamma\varrho} G^\varrho_\varepsilon - G^\varkappa_{\varepsilon\varrho} G^\varrho_\gamma\right)$$

ist, und $F_{\alpha\beta\gamma\varepsilon}$ den von O. VARGA eingeführten Hauptkrümmungstensor bedeutet.[6]

[6] Siehe O. VARGA [9].

Die geodätischen Linien des Finslerschen Raumes sind die autoparallelen Kurven, d. h. die Lösungskurven des Differentialgleichungssystems

$$\omega^{\alpha}=0. \tag{1. 12}$$

O. Varga hat den Begriff der sog. quasigeodätischen Kurve eingeführt.[7] Die quasigeodätischen Kurven eines Linienelementes $(\underset{(0)}{y}, \underset{(0)}{v})$ sind Kurven von folgender Beschaffenheit: Wird längs derselben der Vektor $l^{\alpha}(\underset{(0)}{y}, \underset{(0)}{v})=\underset{(0)}{l^{\alpha}}$ parallel verschoben, dann sind ihre Tangentenvektoren bezüglich des so erhaltenen Feldes l^{α} parallel.

Die quasigeodätischen Kurven sind also die gewissen Anfangsbedingungen genügenden Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$\frac{d^2y^{\alpha}}{ds^2}=-\Gamma^{*\alpha}_{\beta\gamma}(y,v)\frac{dy^{\beta}}{ds}\frac{dy^{\gamma}}{ds}, \tag{1. 13a}$$

$$\frac{dl^{\alpha}}{ds}=-\Gamma^{*\alpha}_{0\gamma}(y,v)\frac{dy^{\gamma}}{ds}. \tag{1. 13b}$$

Durch diese Kurven wird eine genügend kleine Umgebung des Punktes $\underset{(0)}{y}$ einfach bedeckt.[8]

Diejenigen Finslerschen Räume, in welchen die geodätischen Linien unter Zugrundelegung eines ausgezeichneten Koordinatensystems durch $(n-1)$ lineare Gleichungen beschrieben werden können, werden wir projektiv-ebene Finslersche Räume nennen.[9]

Ein Finslerscher Raum ist projektiv-eben, falls die Relationen

$$G^{\alpha}_{\beta\gamma\tau}-\frac{1}{n+1}\left(G^{\varepsilon}_{\beta\gamma\varepsilon}\delta^{\alpha}_{\tau}+G^{\varepsilon}_{\gamma\tau\varepsilon}\delta^{\alpha}_{\beta}+G^{\varepsilon}_{\beta\tau\varepsilon}\delta^{\alpha}_{\gamma}\right)-\frac{1}{n+1}G^{\varepsilon}_{\beta\gamma\tau\varepsilon}v^{\alpha}=0 \tag{1. 14}$$

und

$$K^{\alpha}_{\beta}-K\delta^{\alpha}_{\beta}-\frac{1}{n+1}\left(\frac{\partial K^{\varepsilon}_{\beta}}{\partial v^{\varepsilon}}-\frac{\partial K}{\partial v^{\beta}}\right)v^{\alpha}=0 \tag{1. 15}$$

bestehen,[10] wobei wir

$$\frac{\partial G^{\alpha}}{\partial v^{\beta}}=G^{\alpha}_{\beta},\ \frac{\partial G^{\alpha}}{\partial v^{\beta}\partial v^{\gamma}}=G^{\alpha}_{\beta\gamma},\ \ldots, \tag{1. 16}$$

$$K^{\alpha}_{\beta}=2\frac{\partial G^{\alpha}}{\partial y^{\beta}}-\frac{\partial G^{\alpha}_{\beta}}{\partial y^{\varepsilon}}v^{\varepsilon}+2G^{\alpha}_{\beta\varepsilon}G^{\varepsilon}-G^{\alpha}_{\varepsilon}G^{\varepsilon}_{\beta}, \tag{1. 17}$$

$$K=\frac{1}{n-1}K^{\alpha}_{\alpha} \tag{1. 18}$$

gesetzt haben.

[7] Siehe O. Varga [8].
[8] Im folgenden sei die Dimensionszahl des Raumes größer als 2.
[9] Siehe L. Berwald [1], S. 164.
[10] Siehe J. Douglas [4], S. 157—158.

In einem projektiv-ebenen Finslerschen Raum F_n kann ein Koordinatensystem eingeführt werden, für welches

$$G^\alpha(y, v) = P(y, v)\, v^\alpha \tag{1.19}$$

gilt.[11]

Zwischen den Verschiebungsparametern $G^\alpha_{\beta\gamma}$ von L. Berwald und $\Gamma^{*\alpha}_{\beta\gamma}$ von E. Cartan besteht folgender Zusammenhang:[12]

$$G^\alpha_{\beta\gamma} = \Gamma^{*\alpha}_{\beta\gamma} + A^\alpha_{\beta\gamma|0}. \tag{1.20}$$

L. Berwald hat die Finslerschen Räume, in welchen der Ausdruck

$$R(y, v, \eta(y, v)) = \frac{R_{0\alpha0\beta}\,\eta^\alpha \eta^\beta}{(g_{\varepsilon\tau} - l_\varepsilon l_\tau)\,\eta^\varepsilon \eta^\tau} \tag{1.21}$$

von der Wahl des Vektors $\eta^\alpha(y, v)$ (also $R(y, v, \eta)$ von der Ebenenstellung (v, η)) unabhängig ist, Finslersche Räume skalarer Krümmung genannt, da für diese $R(y, v, \eta)$ eine skalare Größe darstellt.[13]

Für die Finslerschen Räume skalarer Krümmung sind folgende Gleichungen charakteristisch:[14]

$$R_0{}^\alpha{}_{0\beta} = \frac{K^\alpha_\beta}{L^2} = R(y, v)(\delta^\alpha_\beta - l^\alpha l_\beta) \tag{1.22}$$

oder

$$\begin{aligned} R_0{}^\alpha{}_{\beta\gamma} = \frac{K^\alpha_{\beta\gamma}}{L} = \frac{1}{3} R_{||\beta}(\delta^\alpha_\gamma - l^\alpha l_\gamma) - \\ - \frac{1}{3} R_{||\gamma}(\delta^\alpha_\beta - l^\alpha l_\beta) + R(\delta^\alpha_\gamma l_\beta - \delta^\alpha_\beta l_\gamma), \end{aligned} \tag{1.23}$$

wobei

$$R_{||\alpha} = \frac{\partial R}{\partial v^\alpha} L, \tag{1.24}$$

$$K^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{3}\frac{1}{L}\left(K^\alpha_{\gamma||\beta} - K^\alpha_{\beta||\gamma}\right) \tag{1.25}$$

gesetzt wurde.

Ist der Skalar R eine Konstante, dann nennt L. Berwald den Raum einen Finslerschen Raum konstanter Krümmung. Für den Raum konstanter Krümmung sind die Gleichungen

$$R_0{}^\alpha{}_{\beta\gamma} = R(\delta^\alpha_\gamma l_\beta - \delta^\alpha_\beta l_\gamma) \tag{1.26}$$

[11] Siehe L. Berwald [1], S. 780.
[12] Siehe E. Cartan [2], Formel XV.
[13] Siehe L. Berwald [1], S 773–774.
[14] Für das folgende siehe L. Berwald [1], S. 772 u. f.

oder

(1.27) $$K_{\beta\ \gamma\tau}^{\ \alpha} = R(g_{\beta\gamma}\delta_\tau^\alpha - g_{\beta\tau}\delta_\gamma^\alpha)$$

mit

$$K_{\beta\ \gamma\tau}^{\ \alpha} = \frac{\partial K_{\gamma\tau}^\alpha}{\partial v^\beta}$$

charakteristisch. Der Tensor $K_{\beta\gamma\tau}^\alpha$ hängt mit dem Tensor $R_{\beta\gamma\tau}^\alpha$ auf folgende Weise zusammen:

(1.28a) $$\frac{1}{2}(K_{\alpha\beta\gamma\tau} + K_{\beta\alpha\gamma\tau}) = A_{\alpha\beta\gamma|0|\tau} - A_{\alpha\beta\tau|0|\gamma} - A_{\alpha\beta}^{\varepsilon} R_{0\varepsilon\gamma\tau}\,,$$

(1.28b) $$\frac{1}{2}(K_{\alpha\beta\gamma\tau} - K_{\beta\alpha\gamma\tau}) = R_{\alpha\beta\gamma\tau} + A_{\alpha\gamma|0}^{\varepsilon} A_{\varepsilon\beta\tau|0} - A_{\alpha\tau|0}^{\varepsilon} A_{\varepsilon\beta\gamma|0}\,.$$

§ 2. Hyperflächen im Finslerschen Raum

Wir betrachten in einem n-dimensionalen Finslerschen Raum eine durch die Parameterdarstellung

(2.1) $$y^\alpha = y^\alpha(x^1, \ldots, x^{n-1})$$

gegebene Hyperfläche. Wir fassen die Hyperfläche als geometrischen Ort der tangentialen Linienelemente, d. h. als die Linienelementenmannigfaltigkeit

(2.2) $$y^\alpha = y^\alpha(x^1, \ldots, x^{n-1}), \qquad v^\alpha = \varphi_i^\alpha w^i$$

auf, wo

(2.3) $$\varphi_i^\alpha = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}$$

gesetzt wurde.

Auf dieser Fläche definieren wir eine, durch die Größen induzierte Projektionsgeometrie, sowie eine innere, Cartansche Geometrie.[15] Diese beiden Flächengeometrien sind im allgemeinen voneinander verschieden.[16]

Die Hauptformeln der Projektionsgeometrie sind die folgenden (siehe O. VARGA [1]) (D bedeutet das invariante Differential des Raumes, ν_α den Normalvektor der Hyperfläche):

(2.4a) $$g_{ik} = g_{\alpha\beta}\varphi_i^\alpha \varphi_k^\beta\,,$$

(2.4b) $$\varphi_k^\alpha \varphi_\alpha^i = \delta_k^i\,,$$

(2.4c) $$\varphi_k^\alpha \varphi_\beta^k = \delta_\beta^\alpha - \nu^\alpha \nu_\beta\,,$$

(2.5) $$l^\alpha = \varphi_i^\alpha l^i\,,$$

[15] Siehe z. B. O. VARGA [7], E. DAVIES [3], H. HOMBU [5] und S. KIKUCHI [6].
[16] Siehe O. Varga [7], S. 201.

(2. 6) $$\varphi_{ik}^{\alpha}=\frac{\partial \varphi_i^{\alpha}}{\partial x^k},$$

(2. 7) $$\varphi_\alpha^i=\varphi_k^\beta g_{\alpha\beta}g^{ik},$$

(2. 8) $$c_i^\alpha=\nu^\alpha\nu_\sigma(\varphi_{0\ i}^{\ \sigma}+\Gamma_{0\ \beta}^{*\sigma}\varphi_i^\beta),$$

(2. 9) $$b_{ri}=(\varphi_{ri}^\sigma+A_{\beta\gamma}^\sigma c_r^\beta\varphi_i^\gamma+\Gamma_{\beta\gamma}^{*\sigma}\varphi_i^\beta\varphi_r^\gamma)\nu_\sigma,$$

(2. 10) $$a_{ri}=A_{\beta\gamma}^\sigma\varphi_r^\beta\varphi_i^\gamma\nu_\sigma.$$

b_{ri} bzw. a_{ri} bedeutet die zweite bzw. die dritte Grundform der Fläche. Weitere Formeln sind noch:

(2. 11) $$\omega^\alpha=\varphi_i^\alpha\omega^i+b_{0i}\nu^\alpha dx^i,$$

(2. 12a) $$D\varphi_i^\alpha=\pi_i^k\varphi_k^\alpha+e_i\nu^\alpha,$$

(2. 12b) $$D\nu_\alpha=-e^k\varphi_k^\alpha,$$

wo

(2. 13) $$\pi_i^k=A_{\beta\gamma}^\alpha\varphi_\alpha^k\varphi_i^\beta\varphi_r^\gamma\omega^r+(\varphi_{ir}^\alpha\varphi_\alpha^k+A_{\beta\gamma}^\alpha c_r^\gamma\varphi_\alpha^k\varphi_i^\beta+\Gamma_{\beta\gamma}^{*\alpha}\varphi_\alpha^k\varphi_i^\beta\varphi_r^\gamma)dx^r$$

und

(2. 14) $$e_i=b_{ir}dx^r+a_{ir}\omega^r$$

gesetzt wurde.

Bezeichnen wir die Tensoren der Flächenkrümmung durch R_{ijhk}, P_{ijhk} und durch S_{ijhk}, dann ergeben sich folgende verallgemeinerte Gaußsche Gleichungen:

(2. 15a) $$S_{\alpha\ \gamma\delta}^{\ \beta}\varphi_i^\alpha\varphi_\beta^r\varphi_k^\gamma\varphi_j^\delta-S_{i\ kj}^{\ r}+a_{ik}a_j^r-a_{ij}a_k^r=0,$$

(2. 15b) $$S_{\alpha\ \gamma\delta}^{\ \beta}\varphi_i^\alpha\varphi_\beta^r\nu^\gamma\varphi_j^\delta b_{0k}+P_{\alpha\ \gamma\delta}^{\ \beta}\varphi_i^\alpha\varphi_\beta^r\varphi_k^\gamma\varphi_j^\delta-P_{i\ kj}^{\ r}+b_{ik}a_j^r-a_{ij}b_{\ k}^r=0,$$

(2. 15c) $$R_{\alpha\ \gamma\delta}^{\ \beta}\varphi_i^\alpha\varphi_\beta^r\varphi_k^\gamma\varphi_j^\delta+P_{\alpha\ \gamma\delta}^{\ \beta}\varphi_i^\alpha\varphi_\beta^r\varphi_k^\gamma\nu^\delta b_{0j}-P_{\alpha\ \gamma\delta}^{\ \beta}\varphi_i^\alpha\varphi_\beta^r\varphi_j^\gamma\nu^\delta b_{0k}-R_{i\ kj}^{\ r}+$$
$$+b_{ik}b_j^r-b_{ij}b_k^r=0.$$

Als Verallgemeinerung der Mainardi—Codazzischen Gleichungen erhalten wir hingegen:

(2. 16a) $$S_{\alpha\ \gamma\delta}^{\ \beta}\nu^\alpha\varphi_\beta^r\varphi_k^\gamma\varphi_j^\delta-(a_{j;k}^r-a_{k;j}^r)+l_ka_{\ j}^r-l_ja_{\ k}^r=0,$$

(2. 16b) $$S_{\alpha\ \gamma\delta}^{\ \beta}\nu^\alpha\varphi_\beta^r\nu^\gamma\varphi_j^\delta b_{0k}+P_{\alpha\ \gamma\delta}^{\ \beta}\nu^\alpha\varphi_\beta^r\varphi_k^\gamma\varphi_j^\delta+b_{k;j}^r+$$
$$+b_{\ m}^r\varphi_\alpha^m A_{\beta\gamma}^\alpha\varphi_k^\beta\varphi_j^\gamma-a_{j|k}^r-a_{\ m}^rP_{0\ kj}^{\ m}=0,$$

(2. 16c) $$P_{\alpha\ \gamma\delta}^{\ \beta}\nu^\alpha\varphi_\beta^r\varphi_k^\gamma\nu^\delta b_{0j}-P_{\alpha\ \gamma\delta}^{\ \beta}\nu^\alpha\varphi_\beta^r\varphi_j^\gamma\nu^\delta b_{0k}+R_{\alpha\ \gamma\delta}^{\ \beta}\nu^\alpha\varphi_\beta^r\varphi_k^\gamma\varphi_j^\delta-b_{\ j|k}^r+$$
$$+b_{k|j}^r-b_{\ m}^rT_{\ jk}^m+a_{\ m}^rR_{0\ kj}^{\ m}=0.$$

In (2. 16c) ist
$$T_{jk}^{\ \ m}=A_{\beta\gamma}^\alpha c_k^\gamma\varphi_j^\beta\varphi_\alpha^m-A_{\beta\gamma}^\alpha c_j^\gamma\varphi_k^\beta\varphi_\alpha^m$$
einer der Torsionstensoren des Raumes.

Die Normalkrümmung der Hyperfläche wird durch

$$N=\frac{\omega^{\alpha}}{ds}\nu_{\alpha}=-\frac{D\nu^{\alpha}}{ds}l_{\alpha} \tag{2.17}$$

gegeben. Aus (2. 11), (2. 17), (2. 9) und (1. 20) ergibt sich

$$N=b_{00}=\left(\varphi^{\alpha}_{ij}l^{i}l^{j}+G^{\alpha}\frac{2}{L^{2}}\right)\nu_{\alpha}. \tag{2.18}$$

§ 3. Hyperebenen erster Art im Finslerschen Raum

Es sei im Finslerschen Raum F_n eine Hyperfläche F_{n-1} in der Parameterdarstellung (2. 1), (2. 2) gegeben.

DEFINITION 1. *Wir nennen eine Hyperfläche F_{n-1} eine Hyperebene erster Art, falls im Sinne der Projektionsmetrik jede zu einem Linienelement der Fläche gehörige räumliche geodätische Linie zugleich eine Flächengeodätische, und umgekehrt, jede Flächengeodätische auch eine räumliche Geodätische ist.*

Damit ein F_{n-1} eine Hyperebene erster Art sei, ist es nach (2. 11) notwendig und hinreichend, daß

$$b_{00}=b_{ir}l^{i}l^{r}=0 \tag{3.1}$$

sein soll.

SATZ 1. *Auf einer Ebene erster Art gilt*

$$b_{ir}l^{i}=b_{ir}l^{r}=0.$$

BEWEIS. Es sei

$$\frac{dx^{i}}{ds}=l^{i}. \tag{3.2}$$

Aus (2. 11), (3. 2) und (3. 1) ergibt sich

$$\varphi^{\alpha}_{ik}l^{i}l^{k}-2\varphi^{\alpha}_{i}G^{i}(x,l)+2G^{\alpha}(y,l)=0. \tag{3.3}$$

In (3. 3) ist G^{i} eine durch die innere Geometrie der Fläche auf Grund von (1. 6f) bestimmte Größe, die mit der durch das Projektionsverfahren bestimmten Größe G^{i} zusammenfällt.[17] Aus (3. 3) folgt

$$\varphi^{\alpha}_{ik}w^{i}w^{k}-2\varphi^{\alpha}_{i}G^{i}(x,w)+2G^{\alpha}(y,v)=0. \tag{3.4}$$

Falls wir jetzt (3. 4) nach w^{s} ableiten und sodann mit ν_{α} komponieren, so ergibt sich

$$\nu_{\alpha}(\varphi^{\alpha}_{s0}+\Gamma^{*\alpha}_{0\beta}\varphi^{\beta}_{s})=0. \tag{3.5}$$

Aus (2. 8), (2. 9) und (3. 5) folgt unsere Behauptung.

[17] Siehe z. B. E. DAVIES [3], S. 23.

Satz 2. *In einer Hyperebene erster Art fallen die innere Geometrie und die Projektionsgeometrie zusammen.*

Der Beweis ergibt sich z. B. aus E. Davies [1], S. 24, Formel 27.[18]
Auf Grund von (3. 4) ist die Bedingung

$$b_{00}=0$$

mit dem Differentialgleichungssystem

$$\varphi^{\alpha}_{js}-\varphi^{\alpha}_{i}G^{i}_{js}+G^{\alpha}_{\beta\gamma}\varphi^{\beta}_{j}\varphi^{\gamma}_{s}=0 \tag{3. 6}$$

äquivalent, das sich auch (3. 4) durch Ableitung nach w^j und w^s ergibt.
Die Integrabilitätsbedingungen von (3. 6) sind:

$$K^{\alpha}_{\beta\gamma\tau}\varphi^{\beta}_{i}\varphi^{\gamma}_{j}\varphi^{\tau}_{k}=K^{s}_{ijk}\varphi^{\alpha}_{s}, \tag{3. 7a}$$

$$K^{\alpha}_{\beta\gamma\tau}\varphi^{\beta}_{i}\varphi^{\gamma}_{j}\varphi^{\tau}_{k}\nu_{\alpha}=0, \tag{3. 7b}$$

$$G^{\alpha}_{\beta\gamma\tau}\varphi^{\beta}_{i}\varphi^{\gamma}_{j}\varphi^{\tau}_{k}=G^{s}_{ijk}\varphi^{\alpha}_{s}, \tag{3. 7c}$$

$$G^{\alpha}_{\beta\gamma\tau}\varphi^{\beta}_{i}\varphi^{\gamma}_{j}\varphi^{\tau}_{k}\nu_{\alpha}=0. \tag{3. 7d}$$

Bei unseren weiteren Darlegungen verwerten wir das folgende

Lemma. *Voraussetzung: Es sei* $T^{\alpha}_{\beta_1\ldots\beta_k}$ *ein Tensor, der*

1) *symmetrisch in den unteren Indizes ist,*

2) $T^{\alpha}_{0\beta_2\ldots\beta_k}=0$

ist, und schließlich

3) *falls* n^{α} *ein beliebiger zu* l^{α} *orthogonaler Vektor und* $\underset{(1)}{t^{\alpha}}\ldots\underset{(k)}{t^{\alpha}}$ *beliebige (nicht notwendigerweise voneinander verschiedene) zu* n^{α} *orthogonale Vektoren sind, die Relation*

$$T^{\alpha}_{\beta_1\ldots\beta_k}\underset{(1)}{t^{\beta_1}}\cdots\underset{(k)}{t^{\beta_k}}=0$$

gilt.

Behauptung: Es gilt die Darstellung

$$T^{\alpha}_{\beta_1\ldots\beta_k}=\delta^{\alpha}_{\beta_1}B_{\beta_2\ldots\beta_k}+\cdots+\delta^{\alpha}_{\beta_k}B_{\beta_1\ldots\beta_{k-1}}+l^{\alpha}A_{\beta_1\ldots\beta_k} \tag{3. 8}$$

mit

$$B_{0\beta_3\ldots\beta_k}=0, \tag{3. 9}$$

$$A_{0\beta_2\ldots\beta_k}=-B_{\beta_2\ldots\beta_k}. \tag{3. 10}$$

[18] Siehe z. B. S. Kikuchi [6], S. 75.

BEWEIS.[19] Es sei $\underset{(1)}{l}^{\alpha} = \underset{(1)}{l}^{\alpha}, \underset{(2)}{l}^{\alpha}, \ldots, \underset{(n)}{l}^{\alpha}$ ein orthogonales normiertes n-Bein, dann können wir den Tensor in der Form

$$T^{\alpha}_{\beta_1 \ldots \beta_k} = \overset{(1)}{S}_{\beta_1 \ldots \beta_k} \underset{(1)}{l}^{\alpha} + \overset{(2)}{S}_{\beta_1 \ldots \beta_k} \underset{(2)}{l}^{\alpha} + \cdots + \overset{(n)}{S}_{\beta_1 \ldots \beta_k} \underset{(n)}{l}^{\alpha} \tag{3. 11}$$

darstellen.

Für $2 \leqq i \leqq n$ folgt aus der n-Beindarstellung und der Voraussetzungen 1) und 3)

$$\overset{(i)}{S}_{\beta_1 \ldots \beta_k} = T^{\alpha}_{\beta_1 \ldots \beta_k} \underset{(i)}{l}_{\alpha} = \underset{(i)}{l}_{\beta_1} \overset{(i)}{B}_{\beta_2 \ldots \beta_k} + \underset{(i)}{l}_{\beta_2} \overset{(i)}{B}_{\beta_1 \beta_3 \ldots \beta_k} + \cdots + \underset{(i)}{l}_{\beta_k} \overset{(i)}{B}_{\beta_1 \ldots \beta_{k-1}}. \tag{3. 12}$$

Aus der Voraussetzung 2) folgt ferner, daß

$$\overset{(i)}{B}_{0 \ldots \beta_k} = 0. \tag{3. 13}$$

Da für $\overset{(1)}{S}_{\beta_1 \ldots \beta_k}$ die Voraussetzung 3) nicht anwendbar ist, findet man, falls man wieder die n-Beindarstellung des Tensors verwendet,

$$\overset{(1)}{S}_{\beta_1 \ldots \beta_k} = T^{\alpha}_{\beta_1 \ldots \beta_k} \underset{(1)}{l}_{\alpha} = \underset{(1)}{l}_{\beta_1} \overset{(1)}{B}_{\beta_2 \ldots \beta_k} + \cdots + \underset{(1)}{l}_{\beta_k} \overset{(1)}{B}_{\beta_1 \ldots \beta_{k-1}} + G_{\beta_1 \ldots \beta_k}. \tag{3. 14}$$

Fall 1. Falls etwa $\overset{(i)}{S}_{\beta_1 \ldots \beta_k}$ mit $i \geqq 2$ kein Nulltensor ist, dann kommt aus (3. 12) wegen

$$\underset{(\varrho)}{l}^{\alpha} \underset{(\varrho)}{l}_{\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta} \tag{3. 15}$$

die Relation

$$\begin{aligned} T^{\alpha}_{\beta_1 \ldots \beta_k} = {} & \delta^{\alpha}_{\beta_1} \overset{(i)}{B}_{\beta_2 \ldots \beta_k} + \cdots + \delta^{\alpha}_{\beta_k} \overset{(i)}{B}_{\beta_2 \ldots \beta_{k-1}} + \underset{(1)}{l}^{\alpha} [\overset{(1)}{S}_{\beta_1 \ldots \beta_k} - \underset{(1)}{l}_{\beta_1} \overset{(1)}{B}_{\beta_2 \ldots \beta_k} - \underset{(1)}{l}_{\beta_k} \overset{(i)}{B}_{\beta_1 \ldots \beta_{k-1}}] + \\ & + \sum_{i''=2, \ldots, i-1}^{i+1, \ldots, n} \underset{(i'')}{l}^{\alpha} [\overset{(i'')}{S}_{\beta_1 \ldots \beta_k} - \underset{(i'')}{l}_{\beta_1} \overset{(i)}{B}_{\beta_2 \ldots \beta_k} - \cdots - \underset{(i'')}{l}_{\beta_k} \overset{(i)}{B}_{\beta_1 \ldots \beta_{k-1}}]. \end{aligned} \tag{3. 16}$$

Fall 2. Gibt es kein solches i, dann folgt aus (3. 14)

$$\begin{aligned} T^{\alpha}_{\beta_1 \ldots \beta_k} = {} & \delta^{\alpha}_{\beta_1} \overset{(1)}{B}_{\beta_2 \ldots \beta_k} + \cdots + \delta^{\alpha}_{\beta_k} \overset{(1)}{B}_{\beta_1 \ldots \beta_{k-1}} + \underset{(1)}{l}^{\alpha} G_{\beta_1 \ldots \beta_k} + \\ & + \sum_{i''=2}^{n} \underset{(i'')}{l}^{\alpha} [\overset{(i'')}{S}_{\beta_1 \ldots \beta_k} - \underset{(i'')}{l}_{\beta_1} \overset{(1)}{B}_{\beta_2 \ldots \beta_k} - \cdots - \underset{(i'')}{l}_{\beta_k} \overset{(1)}{B}_{\beta_1 \ldots \beta_{k-1}}]. \end{aligned} \tag{3. 17}$$

Es sei nun n^{α} ein Einheitsvektor, der eine Linearkombination der Vektoren $\underset{(i'')}{l}^{\alpha}$ ist, die je nachdem, ob der Fall 1 oder Fall 2 vorliegt; in der Gleichung (3. 16) bzw. (3. 17) vorkommen.

[19] Dieses Lemma habe ich durch ein ziemlich kompliziertes Verfahren bewiesen. Den nachfolgenden einfacheren Beweis verdanke ich Prof. O. VARGA.

Es ist also

(3. 18) $$n^\alpha = c_{i''} \underset{(i'')}{l^\alpha}.$$

Die Vektoren $\underset{(1)}{t^\alpha}, \ldots, \underset{(n-1)}{t^\alpha}$ seien $(n-1)$ zueinander orthogonale Einheitsvektoren des Normalraumes von n^α. Unter den $\underset{(s)}{t^\alpha}$ $(s = 1, \ldots, n-1)$ gibt es bestimmt k derartige $\underset{(i_1)}{t^\alpha}, \ldots, \underset{(i_k)}{t^\alpha}$, so daß die Überschiebung derselben mit den Tensoren, die in der eckigen Klammer von (3. 16) bzw. (3. 17) vorkommen, nicht lauter Nullen ergeben. Entgegengesetzten Falles würden diese Tensoren selbst Nulltensoren sein, womit der Beweis des Lemmas schon erbracht wäre. Wir bilden nun aus den Vektoren $\underset{(1)}{t^\alpha}, \ldots, \underset{(n-1)}{t^\alpha}$ k Linearkombinationen:

(3. 19) $$v_1^\alpha = p_{1s_1} \underset{(s_1)}{t^\alpha}, \ldots, v_k^\alpha = p_{ks_k} \underset{(s_k)}{t^\alpha}.$$

Die Schar

(3. 20) $$T^\alpha_{\beta_1 \ldots \beta_k} v_1^{\beta_1} \cdots v_k^{\beta_k} n$$

muß zufolge Voraussetzung 3) verschwinden. Andererseits verschwindet auf der rechten Seite von (3. 16) bzw. (3. 17) alles bis auf den Ausdruck

(3. 21) $$c_{i''} \overset{(i'')}{b}_{s_1 \ldots s_k} p_{1s_1} \cdots p_{ks_k}.$$

In (3. 21) ist $\overset{(i'')}{b}_{s_1 \ldots s_k}$ die Schar, die man durch Überschiebung desjenigen Tensors mit $\underset{(s_1)}{t^\alpha} \ldots \underset{(s_k)}{t^\alpha}$ erhält, der als Faktor von $\underset{(i'')}{l^\alpha}$ auftritt. Zufolge der oben gemachten Bemerkung verschwinden aber nicht sämtliche $\overset{(i'')}{b}_{s_1 \ldots s_k}$. Nun ist es offensichtlich, daß man durch entsprechende Wahl der $p_{s_1}, \ldots, p_{s_k}$ stets erreichen kann, daß der Ausdruck (3. 21) der ja in diesen Größen eine multilineare Form ist, verschwindet. Da dies ein Widerspruch mit Voraussetzung 3) ist, müssen sämtliche Tensoren, die in der eckigen Klammer von (3. 16) bzw. (3. 17) auftreten, verschwinden. Damit ist der Beweis des Lemmas erbracht.

Ist $T^\alpha_{\beta_1\beta_2}$ in den unteren Indizes schiefsymmetrisch, und sind die Bedingungen 1), 2), 3) *gültig, so ist*

(3. 22) $$T^\alpha_{\beta_1\beta_2} = \delta^{\alpha_1}_{\beta_1} B_{\beta_2} - \delta^\alpha_{\beta_2} B_{\beta_1} + A_{\beta_1\beta_2} l^\alpha.$$

Beweis. Ist $\underset{(1)}{l^\alpha} = l^\alpha, \underset{(2)}{l^\alpha}, \ldots, \underset{(n)}{l^\alpha}$ ein orthonormiertes n-Bein, dann wird

(3. 23) $$T^\alpha_{\beta_1\beta_2} = \overset{(1)}{V}_{\beta_1\beta_2} \underset{(1)}{l^\alpha} + \cdots + \overset{(n)}{V}_{\beta_1\beta_2} \underset{(n)}{l^\alpha}$$

bestehen.

Für $2 \leqq i \leqq n$ folgt aus der n-Beindarstellung und der Voraussetzung 1), 2) und 3)

$$T^{\alpha}_{\beta_1\beta_2} = \delta^{\alpha}_{\beta_1} \overset{(1)}{B}_{\beta_2} - \delta^{\alpha}_{\beta_2} B_{\beta_1} + \underset{(1)}{l^{\alpha}} \overset{(1)}{V}_{\beta_1\beta_2} + \underset{(i'')}{l^{\alpha}} [\overset{(i'')}{V}_{\beta_1\beta_2} - \underset{(i'')}{l_{\beta_1}} B_{\beta_2} - \underset{(i'')}{l_{\beta_2}} B_{\beta_1}]. \tag{3. 24}$$

Das übrige, wie vorher.

HAUPTSATZ I. *Damit in einem Finslerschen Raum F_n zu jedem Linienelement in jeder Richtung (d. h. zu einer gegebenen $\nu_\alpha(\underset{(0)}{y}, \underset{(0)}{v})$ als Normale, wo $\nu_\alpha l^\alpha = 0$ ist) eine Hyperebene erster Art gelegt werden kann, ist es notwendig und hinreichend, daß der Raum F_n ein projektiv-ebener Finslerscher Raum skalarer Krümmung ist.*

BEWEIS. Komponieren wir die Integrabilitätsbedingungen (3. 7b) mit l^β, so ergibt sich wegen (1. 28a) und (1. 28b)

$$R_0{}^{\alpha}{}_{\gamma\tau} \varphi^{\gamma}_{j} \varphi^{\tau}_{k} \nu_\alpha = 0. \tag{3. 25}$$

Da nach unseren Voraussetzungen (3. 25) für jedes auf l^α orthogonale ν_α erfüllt ist, so folgt aus Lemma

$$R_0{}^{\alpha}{}_{\gamma\tau} = A_{\gamma\tau} l^\alpha + B_\gamma \delta^\alpha_\tau - B_\tau \delta^\alpha_\gamma. \tag{3. 26}$$

Aus (3. 26), und aus einem Satz von O. VARGA[20] ergibt sich nun, daß der Raum von skalarer Krümmung ist.

Andererseits folgt aus den Integrabilitätsbedingungen (3. 7d) und aus unserem Lemma

$$G^{\alpha}_{\beta\gamma\varepsilon} = P_{\beta\gamma\varepsilon} l^\alpha + A_{\beta\gamma} \delta^\alpha_\varepsilon + A_{\gamma\varepsilon} \delta^\alpha_\beta + A_{\beta\varepsilon} \delta^\alpha_\gamma. \tag{3. 27}$$

Offenbar sind die in (3. 27) auftretenden Tensoren in v^α homogene Tensoren (—1)-ten Grades.

Aus (3. 27) erhalten wir (nach Verjüngung von $G^{\alpha}_{\beta\gamma\varepsilon}$) unter Heranziehung der Darstellung von $P_{\beta\gamma 0}$

$$G^{\alpha}_{\beta\gamma\alpha} = (n+1) A_{\beta\gamma}. \tag{3. 28}$$

Leiten wir (3. 28) nach v^τ ab, so erhalten wir

$$\frac{\partial G^{\alpha}_{\beta\gamma\alpha}}{\partial v^\tau} \overset{\text{def.}}{=} G^{\alpha}_{\beta\gamma\alpha\tau} = G^{\alpha}_{\beta\gamma\tau\alpha} = (n+1) \frac{\partial A_{\beta\gamma}}{\partial v^\tau} \overset{\text{def.}}{=} (n+1) A_{\beta\gamma\tau}. \tag{3. 29}$$

Indem wir jetzt auch (3. 27) nach v^τ ableiten, und danach eine Verjüngung nach den Indizes α und τ vornehmen, erhalten wir auf Grund der Homogenitätseigenschaften

$$G^{\sigma}_{\beta\gamma\varepsilon\sigma} = -\frac{1}{L} P_{\beta\gamma\varepsilon} + (n-1) \frac{1}{L} P_{\beta\gamma\varepsilon} + 3 A_{\beta\gamma\varepsilon}. \tag{3. 30}$$

[20] Siehe O. VARGA [10], S. 153.

Aus (3. 29) und (3. 30) folgt

$$\frac{1}{L} P_{\beta\gamma\varepsilon} = \frac{1}{n+1} G^{\alpha}_{\beta\gamma\varepsilon\alpha}. \tag{3.31}$$

Aus (3. 27), (3. 28) und (3. 31) folgt

$$G^{\alpha}_{\beta\gamma\varepsilon} = \frac{1}{n+1}\left(G^{\tau}_{\beta\gamma\tau}\delta^{\alpha}_{\varepsilon} + G^{\tau}_{\gamma\varepsilon\tau}\delta^{\alpha}_{\beta} + G^{\tau}_{\beta\varepsilon\tau}\delta^{\alpha}_{\gamma}\right) + \frac{1}{n+1} G^{\tau}_{\beta\gamma\varepsilon\tau} v^{\alpha}. \tag{3.32}$$

Da (1. 15) in jedem Raum skalarer Krümmung gültig ist,[21] folgt aus (3. 26) und (3. 32), daß der Raum F_n ein projektiv-ebener Finslerscher Raum ist.

Unsere Bedingung ist also notwendig.

Umgekehrt sei jetzt ein projektiv-ebener Finslerscher Raum gegeben. Wir betrachten in diesem Raum ein beliebiges Linienelement $(\underset{(0)}{y}, \underset{(0)}{v})$ und darin einen auf $\underset{(0)}{l^{\alpha}}$ orthogonalen Einheitsvektor $\nu_{\alpha}(\underset{(0)}{y}, \underset{(0)}{v}) = \underset{(0)}{\nu_{\alpha}}$. Wir führen jetzt ein ausgezeichnetes Koordinatensystem ein, in welchem also (1. 19) gültig ist. Aus dem Transformationsgesetz für $G^{\alpha}(y, v)$ folgt die Invarianz gegenüber linearen Transformationen von (1. 19).

Wir ergänzen jetzt den Vektor $\underset{(0)}{\nu_{\alpha}}$ zu einem ortogonalen n-Bein, indem wir $(n-1)$ orthogonale Vektoren hinzunehmen. Es seien dies die Vektoren $\underset{(0)}{\varphi^{\alpha}_{i}}$. Demnach gelten die Gleichungen

$$\underset{(0)}{\nu_{\alpha}} \underset{(0)}{\varphi^{\alpha}_{i}} = 0 \tag{3.33}$$

und

$$\det \left| \underset{(0)}{\varphi^{\alpha}_{i}}, \underset{(0)}{\nu^{\alpha}} \right| \neq 0. \tag{3.34}$$

Wir nehmen jetzt die auf Grund von (3. 34) zulässige lineare Koordinatentransformation

$$y^{\alpha} = \underset{(0)}{\varphi^{\alpha}_{k}} \bar{y}^{k} + \underset{(0)}{\nu^{\alpha}} \bar{y}^{n} + \underset{(0)}{y^{\alpha}} \tag{3.35}$$

vor. Aus (3. 35) folgt, daß die neuen Koordinaten des Linienelementes $(\underset{(0)}{y}, \underset{(0)}{v})$ und die neuen Komponenten des Vektors $\underset{(0)}{\nu_{\alpha}}$ die folgenden sind:

$$\begin{aligned}
&\underset{(0)}{\bar{y}^{\alpha}} = 0; \qquad && \underset{(0)}{\bar{v}^{k}} = \underset{(0)}{\varphi^{k}_{\beta}} \underset{(0)}{v^{\beta}}; \qquad && \bar{v}^{n} = 0; \\
&\underset{(0)}{\bar{\nu}_{k}} = 0; && \underset{(0)}{\bar{\nu}_{n}} = \underset{(0)}{\nu_{\alpha}} \underset{(0)}{\nu^{\alpha}} = 1; && \\
&\underset{(0)}{\bar{g}^{nn}} = 1; && \underset{(0)}{\bar{\nu}^{n}} = 1; && \underset{(0)}{\bar{\nu}^{\alpha}} \underset{(0)}{\bar{\nu}_{\alpha}} = 1.
\end{aligned} \tag{3.36}$$

[21] Siehe L. Berwald [1], S. 776.

In diesem Koordinatensystem ist die Hyperfläche

$$\bar{y}^n = 0 \tag{3. 37}$$

eine Hyperebene erster Art, welche im gegebenen Linienelement den Normalvektor $\underset{(0)}{\nu_\alpha}$ hat.

Wegen (3. 36) berührt das gegebene Linienelement die Hyperfläche (3. 37), und $\underset{(0)}{\nu_\alpha}$ ist der Normalvektor der Hyperfläche in diesem Linienelement.

Andererseits ist (1. 19) gegenüber der Koordinatentransformation (3. 35) invariant, so daß der Hyperfläche (3. 37) entlang

$$\bar{G}^n(\bar{y}^1, \ldots, \bar{y}^{n-1}, 0, \bar{v}^1, \ldots, \bar{v}^{n-1}, 0) = 0 \tag{3. 38}$$

ist.

Wie man sofort einsieht, ist die Normalkrümmung von (3. 37)

$$\bar{b}_{00} = \bar{N} = \frac{2}{\bar{L}^2} \bar{\nu}_\alpha \bar{G}^\alpha. \tag{3. 39}$$

Da für die Normalvektoren der Hyperfläche (3. 37) nur die n-te kovariante Komponente von 0 verschieden ist, folgt aus (3. 39) und (3. 38)

$$\bar{b}_{00} = 0,$$

d. h. die Hyperfläche ist eine Hyperebene erster Art.. Die Bedingung ist also auch hinreichend.

§ 4. Hyperebenen zweiter Art oder O. Vargasche Hyperebenen; Hyperebenen dritter Art

Definition 2. *Eine Hyperfläche* (2. 1), (2. 2) *wird eine Hyperebene zweiter Art oder O. Vargasche Hyperebene genannt, falls jede räumliche Quasigeodätische, deren Anfangslinienelement und Anfangstangente auf der Hyperfläche liegen, zugleich Flächenquasigeodätische ist, und umgekehrt, jede Flächenquasigeodätische auch räumliche Quasigeodätische ist (im Sinne der Projektionsmetrik).*

Satz 3. *Damit eine Hyperfläche F_{n-1} eine O. Vargasche Hyperebene sei, ist die Bedingung*

$$b_{ir} = 0 \tag{4. 1}$$

notwendig und hinreichend.

Beweis. Es sei ϑ das invariante Differential der Projektionsmetrik der Fläche. Ist ξ^i ein Flächenvektor, dann gilt offenbar

$$\vartheta \xi^i = \varphi^i_\alpha D \xi^\alpha , \tag{4. 2}$$

wo

$$\xi^\alpha = \varphi_i^\alpha \xi^i$$

und

(4.3) $$\xi^\alpha \nu_\alpha = 0$$

ist.

Aus (4.2), (4.3) und (2.4c) ergibt sich

(4.4) $$\varphi_i^\alpha \vartheta \xi^i = D\xi^\alpha + \nu^\alpha \xi^\beta D \nu_\beta .$$

Ist F_{n-1} eine O. Vargasche Hyperebene, dann folgt wegen (1.13a) und (1.13b) aus dem Differentialgleichungssystem

(4.5a) $$\omega^\alpha = 0, \qquad D\xi^\alpha = 0$$

das System

(4.5b) $$\omega^i = 0, \qquad \vartheta \xi^i = 0$$

und umgekehrt. Somit folgt aber aus (4.5a), (4.5b), (4.4), (2.12b) und (2.14) die Gleichung (4.1), w. z. b. w.

Die Integrabilitätsbedingungen von (4.1) haben auf Grund von (2.8), (2.9), (2.12a) und (2.12b) folgende Gestalt:

(4.6a) $$R_{\beta\ \gamma\varepsilon}^{\ \alpha} \varphi_j^\beta \varphi_k^\gamma \varphi_r^\varepsilon = \varphi_i^\alpha R_{j\ kr}^{\ i} ,$$

(4.6b) $$F_{\beta\ \gamma\varepsilon}^{\ \alpha} \varphi_j^\beta \varphi_k^\gamma \varphi_r^\varepsilon \nu_\alpha = 0,$$

(4.6c) $$\Gamma_{\beta\ \gamma||\varepsilon}^{*\alpha} \varphi_j^\beta \varphi_k^\gamma \varphi_r^\varepsilon = \varphi_i^\alpha \Gamma_{j\ k||r}^{*i} ,$$

(4.6d) $$\Gamma_{\beta\ \gamma||\varepsilon}^{*\alpha} \varphi_j^\beta \varphi_k^\gamma \varphi_r^\varepsilon \nu_\alpha = 0.$$

HAUPTSATZ II. *In einem Finslerschen Raum F_n kann dann und nur dann zu jeder beliebigen Richtung, die stets durch einen zu einem Linienelement orthogonalen Vektor bestimmt ist, eine O. Vargasche Hyperebene gelegt werden, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:*

1) *F_n ist projektiv-eben,*

2) $A_{\alpha\beta\gamma|0} = 0$.

BEWEIS. Setzen wir nun voraus, daß man zu jeder beliebigen Richtung, die durch einen zu einem Linienelement orthogonalen Vektor bestimmt ist, eine O. Vargasche Hyperebene legen kann. Aus (4.6d) und (1.20) folgt

(4.7) $$\Gamma_{\beta\ \gamma||\varepsilon}^{*\alpha} \varphi_k^\beta \varphi_r^\varepsilon l^\gamma \nu_\alpha = A_{\beta\varepsilon|0}^{\alpha} \varphi_k^\beta \varphi_r^\varepsilon \nu_\alpha = 0,$$

und zwar muß diese Gleichung für jeden, auf l^α orthogonalen ν_α gültig sein.

Aus dem im § 3 bewiesenen Lemma, sowie aus (4.7) folgt nun

(4.8) $$A_{\alpha\beta\gamma|0} = P_{\alpha\beta} l_\gamma + B_\alpha g_{\beta\gamma} + B_\beta g_{\alpha\gamma} = \\ = P_{\beta\gamma} l_\alpha + B_\beta g_{\alpha\gamma} + B_\gamma g_{\alpha\beta} = P_{\alpha\gamma} l_\beta + B_\alpha g_{\beta\gamma} + B_\gamma g_{\alpha\beta} .$$

In (4. 8) ist

(4. 9) $$P_{\alpha\beta} = -B_\alpha l_\beta - B_\beta l_\alpha.$$

Aus (4. 8) und (4. 9) folgert man mühelos, daß für einen beliebigen v_α (mit $v_\alpha l^\alpha = 0$, $v_\alpha v^\alpha = 1$)

(4. 10) $$B_\alpha v^\alpha v_\beta = B_\beta$$

gilt. (4. 10) kann aber nur bestehen, falls

(4. 11) $$B_\beta = 0$$

ist. Aus (4. 8) und (4. 11) ergibt sich

(4. 12) $$A_{\alpha\beta\gamma|0} = 0.$$

Aus dem Hauptsatz I und aus (4. 12) folgt die Notwendigkeit der Bedingung.

Sei jetzt, umgekehrt, F_n projektiv-eben, und es gelte (4. 12).

Wir konstruieren zu einem gegebenen Linienelement $(\underset{(0)}{y}, \underset{(0)}{v})$ und zu einem darin gegebenen orthogonalen Vektor $v_\alpha(\underset{(0)}{y}, \underset{(0)}{v})$ auf die im Hauptsatz I angegebenen Weise eine Hyperfläche

(4. 13) $$\bar{y}^n = 0.$$

Unter diesen Bedingungen ist (4. 13) eine O. Vargasche Hyperebene.

Aus (2. 8), (2. 9), (1. 19), (1. 20), sowie aus dem Hauptsatz I ergibt sich (da auf der Hyperfläche (4. 13) auf Grund des Hauptsatzes I $b_{0i} = 0$ ist)

(4. 14) $$b_{ir} = \Gamma^{*\alpha}_{\beta\ \gamma} \delta^\beta_i \delta^\gamma_r v_\alpha = G^\alpha_{\beta\gamma} \delta^\beta_i \delta^\gamma_k v_\alpha = 0.$$

(4. 14) besagt, daß die Bedingung hinreichend ist.

Satz 4. *Ist in einem projektiv-ebenen Finslerschen Raum* $A_{\alpha\beta\gamma|0} = 0$, *dann folgt aus der Gültigkeit von*

$$b_{00} = 0$$

auf einer Hyperfläche, daß diese eine O. Vargasche Hyperebene ist.

Der Beweis folgt unmittelbar aus den Hauptsätzen I und II.

Satz 5. *Hat ein projektiv-ebener Finslerscher Raum konstante, aber von Null verschiedene Krümmung, und gilt in diesem Raum* $A_{\alpha\beta\gamma|0} = 0$, *dann ist es ein Riemannscher Raum konstanter Krümmung.*

Beweis. In einem Finslerschen Raum konstanter, von Null verschiedener Krümmung gilt nach (1. 27), (1. 28a) und (1. 28b)

(4. 15) $$A_{\alpha\beta\gamma|0|0} = -R A_{\alpha\beta\gamma}$$

und unsere Behauptung folgt unmittelbar.

DEFINITION 3. *Wir nennen eine Hyperfläche* (2. 1), (2. 2) *eine Hyperebene dritter Art, falls die Normalvektoren dieser Fläche parallel sind.*

Auf Grund von (2. 12b) und (2. 14) ist eine Hyperfläche dann und nur dann eine Hyperebene dritter Art, falls die Bedingungen

(4. 16a) $$b_{ir} = 0,$$

(4. 16b) $$a_{ir} = 0$$

erfüllt sind.

Die Integrationsbedingungen von (4. 16a) und (4. 16b) erhalten wir aus (2. 15a)—(2. 15c) und aus (2.16a)—(2. 16c), indem wir in diese Gleichungen (4. 16a) und (4. 16b) einsetzen.

HAUPTSATZ III.[22] *Damit in einem Finslerschen Raum zu jedem Linienelement in jeder orthogonalen Richtung eine Hyperebene dritter Art gelegt werden kann, ist es notwendig und hinreichend, daß der Raum ein Riemannscher Raum konstanter Krümmung ist.*

BEWEIS. Aus (4. 16b) und (2. 10) folgt für jeden, auf l^α orthogonalen ν_α

(4. 17) $$A_{\beta}{}^{\alpha}{}_{\gamma} \varphi_i^\beta \varphi_r^\gamma \nu_\alpha = 0.$$

Aus (4. 17) ergibt sich nun — ebenso wie beim Hauptsatz II für $A_{\beta}{}^{\alpha}{}_{\gamma 0}$ —

(4. 18) $$A_{\beta}{}^{\alpha}{}_{\gamma} = 0.$$

Aus (4. 18) und aus bekannten Sätzen über Riemannsche Räume folgt nun der Hauptsatz III.

(Eingegangen am 10. Mai 1956.)

Literaturverzeichnis

[1] L. BERWALD, Finslersche und Cartansche Geometrie. IV, *Annals of Math.*, **48** (1947), S. 755—781.

[2] E. CARTAN, *Les espaces de Finsler* (Paris, 1934), Act. scient. et industrielles, 79.

[3] E. DAVIES, Subspaces of a Finsler space, *Proc. London Math. Soc.*, **49** (1947), S. 19—39.

[4] J. DOUGLAS, The general geometry of paths, *Annals of Math.*, **29** (1928), S. 143—168.

[5] H. HOMBU, Die Krümmungstheorie im Finslerschen Raume, *Journal of the Fac. Sci. Hokkaido Imp. Univ. Sapporo, Japan.*, **5** (1936), S. 67—94.

[6] S. KIKUCHI, On the theory of subspace in a Finsler space, *Tensor (Sapporo, Japan)*, New series, **2** (1952), S. 67—79.

[7] O. VARGA, Zur Differentialgeometrie der Hyperflächen in Finslerschen Räumen, *Deutsche Math. Jahrg.*, **6** (1941), S. 192—212.

[22] Siehe S. KIKUCHI [6], S. 78.

[8] O. Varga, Normalkoordinaten in allgemeinen differentialgeometrischen Räumen, und ihre Verwendung zur Bestimmung sämtlicher Differentialinvarianten, *Comptes Rendus du Premier Congrès des Mathématiciens Hongrois* (Budapest, 1952), S. 131—146.

[9] O. Varga, Über affinzusammenhängende Mannigfaltigkeiten von Linienelementen insbesondere deren Äquivalenz, *Publ. Math. Debrecen*, **1** (1949), S. 1—17.

[10] O. Varga, Eine geometrische Charakterisierung der Finslerschen Räume skalarer und konstanter Krümmung, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **2** (1951), S. 143—156.

[11] M. Wegener, Hyperflächen in Finslerschen Räumen als Transversalflächen einer Schar von Extremalen, *Monatsh. f. Math. u. Phys.*, **44** (1936), S. 115—130,

BEITRÄGE ZUR THEORIE DER GEOMETRISCHEN OBJEKTE. III—IV

III. SPEZIELLE GEOMETRISCHE OBJEKTE MIT NICHT WENIGER KOMPONENTEN ALS PARAMETERN

IV. DIFFERENTIELLE GEOMETRISCHE OBJEKTE ERSTER, ZWEITER UND DRITTER KLASSE VON BELIEBIGER KOMPONENTENZAHL IM EINDIMENSIONALEN RAUM

Von

J. ACZÉL (Debrecen)

(*Vorgelegt von* G. HAJÓS)

§ 1. Einleitung

In [2] wurde eine vollkommene Bestimmung aller differentiellen geometrischen Objekte mit einer Komponente im eindimensionalen Raum ohne Derivierbarkeitsvoraussetzungen gegeben. (Bezüglich der Terminologie s. § 2.) In der vorliegenden Arbeit beschäftigen wir uns mit geometrischen Objekten von mehreren Komponenten. Während, wie dies in der Einleitung von [2] ausführlich berichtet wurde, die Transformationsformeln der eindimensionalen differentiellen geometrischen Objekte mit einer Komponente schon bekannt waren, und in [2] dies nur unter schwächeren (Stetigkeits-) Bedingungen wieder erledigt wurde, sind bisher auch unter Linearitäts- bzw. Analytizitätsbedingungen nur Objekte von höchstens zwei Komponenten vollständig bestimmt worden ([4], [5], [6], [9], [10]; vgl. Nachtrag), abgesehen von einem allgemeinen Satz von JU. E. PENSOW [9], der behauptet, daß die eindimensionalen differentiellen geometrischen Objekte von n Komponenten höchstens die Klassenzahl $2n+1$ haben können, und von einem Resultat anderer Natur bezüglich der sogenannten einfachen geometrischen Objekte, das W. W. WAGNER in [12] bewiesen hat.

So werden hier die Transformationsgesetze gewisser allgemeiner Typen von geometrischen Objekten mit beliebig vielen Komponenten in den §§ 3, 4, insbesondere die vollständige Klassifikation der eindimensionalen differentiellen geometrischen Objekte erster, zweiter und dritter Klasse im § 4 zum erstenmal bestimmt. Dagegen sind die Bedingungen, die wir hier voraussetzen, weniger natürlich als in [2], wenn auch nicht allzu sehr einschränkend (besonders in der schwächeren Form, wie sie im Satz 4 vorausgesetzt werden). Die Bedingungen sind denen in den Arbeiten [1], [3] ähnlich, da sich

der hier gegebene Gedankengang auf einen Satz aus [3] stützt (s. hier im § 3). Einfälle bezüglich der Anwendung dieses Satzes und bezüglich Einzelheiten des Nachtrages verdankt der Verfasser Herrn M. HOSSZÚ.

§ 2. Grundbegriffe und Bezeichnungen

Für die allgemeine Literatur der Theorie der *geometrischen Objekte* (da nur solche vorkommen werden, nennen wir sie von nun an der Kürze halber nur „*Objekte*") verweisen wir den Leser auf [8] und auf das Literaturverzeichnis von [2]. Was die Objekte mit u Komponenten im t-dimensionalen Raume betrifft, werden wir ihre Komponenten in das Vektorsymbol

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix} x_{\mathrm{I}} \\ x_{\mathrm{II}} \\ \vdots \\ x_{(u)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{X} \end{pmatrix}\left|\begin{matrix} \mathbf{x}_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_v \end{matrix}\right|, \quad \left[\mathbf{x}_0=\begin{pmatrix} x_{\mathrm{I}} \\ x_{\mathrm{II}} \\ \vdots \\ x_{(u-v)} \end{pmatrix}, \mathbf{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_{(u-v+1)} \\ x_{(u-v+2)} \\ \vdots \\ x_{(u)} \end{pmatrix}\right]$$

zusammenfassen. Zwei Objekte $\mathbf{x}, \mathbf{z}$ nennen wir *äquivalent*, falls es eine umkehrbar eindeutige Vektorfunktion $\mathbf{g}$ gibt derart, daß

$$\mathbf{z}=\mathbf{g}(\mathbf{x})$$

in jedem Koordinatensystem gilt [8].

Nach Definition wird bei einer Transformation der Koordinaten $\eta^j=\varphi^j(\xi^i)$ $(i, j=1, 2, \ldots, t;\ |A_i^j|\neq 0,\ A_i^j=\frac{\partial \eta^j}{\partial \xi^i}$, *ein* Index oder ein Paar oder eine Menge von Indizes steht hier und im folgenden für *alle* solche) das Objekt durch eine Formel

$$\mathbf{y}=\mathbf{f}[\mathbf{x}, \{\varphi^j(\xi^i)\}]$$

transformiert, wo $\mathbf{f}$ eine *Funktionale* der Koordinatentransformation $\eta^j=\varphi^j(\xi^i)$ ist. Kann diese Abhängigkeit durch eine Abhängigkeit von endlich vielen, mit dieser Koordinatentransformation zusammenhängenden Parametern $(U_1, U_2, \ldots, U_r)=\mathbf{U}$ angegeben werden, so sprechen wir von *speziellen* Objekten, die Transformationsgesetze der Gestalt

$$\mathbf{y}=\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{U})$$

haben, wo $\mathbf{f}$ eine *Funktion* der $u+r$ Veränderlichen $\mathbf{x}, \mathbf{U}$ ist.

Da die Funktion $\mathbf{f}$ selbst bei jeder Koordinatentransformation dieselbe bleibt, hat die Durchführung der Transformationen $\eta^j=\varphi^j(\xi^i)$, $\zeta^k=\psi^k(\eta^j)$ nacheinander dieselbe Wirkung, wie die vereinte Transformation $\zeta^k=\psi^k[\varphi^j(\xi^i)]$:

(1) $$\mathbf{f}[\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{U}), \mathbf{V}]=\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{W})=\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{U}\circ\mathbf{V}),$$

wo $\mathbf{W}=\mathbf{U}\circ\mathbf{V}$ eine Zusammensetzung (Multiplikation) der Punkte $\mathbf{U}, \mathbf{V}$ des Parameterraumes ist, die aber nur für gewisse Paare definiert sein muß, nämlich für solche, die zu zwei nacheinander durchführbaren Transformationen gehören. Diese bilden ein Gruppoid (vgl. [8]), das aber in den wichtigsten Spezialfällen zu einer Gruppe wird. (Von den Gruppeneigenschaften werden wir übrigens in dieser Arbeit nur die Assoziativität ausnützen.)

So sind z. B. die Objekte *w-ter Klasse* jene, in denen die Parameter die alten und neuen Koordinaten, sowie die Derivierten höchstens w-ter Ordnung der neuen Koordinaten bezüglich den alten sind:

$$\mathbf{y}=\mathbf{f}(\mathbf{x}, \{\xi^i\}, \{\eta^j\}, \{A^l_k\}, \{A^p_{mn}\}, \ldots, \{A^s_{r_1 r_2 \ldots r_w}\}) \qquad (|A^l_k| \neq 0),$$

$$\mathbf{f}[\mathbf{f}(\mathbf{x}, \{\xi^i\}, \{\eta^j\}, \{A^l_k\}, \{A^p_{mn}\}, \ldots, \{A^s_{r_1 \ldots r_w}\}), \{\eta^j\}, \{\zeta^J\}, \{B^\lambda_\varkappa\}, \{B^\pi_{\mu\nu}\}, \ldots, \{B^\sigma_{\varrho_1 \ldots \varrho_w}\}]=$$

$$=\mathbf{f}(\mathbf{x}, \{\xi^i\}, \{\zeta^J\}, \{C^L_K\}, \{C^P_{MN}\}, \ldots, \{C^S_{R_1 \ldots R_w}\}), \tag{2}$$

$$\left(A^s_{r_1 r_2 \ldots r_q}=\frac{\partial^q \eta^s}{\partial \xi^{r_1} \partial \xi^{r_2} \ldots \partial \xi^{r_q}},\ B^\sigma_{\varrho_1 \varrho_2 \ldots \varrho_q}=\frac{\partial^q \zeta^\sigma}{\partial \eta^{\varrho_1} \ldots \partial \eta^{\varrho_q}},\ C^S_{R_1 \ldots R_q}=\frac{\partial^q \zeta^S}{\partial \xi^{R_1} \ldots \partial \xi^{R_q}}\right).$$

Hier kann

$$\mathbf{U}=(\{\xi^i\}, \{\eta^j\}, \{A^l_k\}, \ldots, \{A^s_{r_1 \ldots r_w}\}),\ \mathbf{V}=(\{\tau^j\}, \{\zeta^J\}, \{B^\lambda_\varkappa\}, \ldots, \{B^\sigma_{\varrho_1 \ldots \varrho_w}\})$$

nur dann multipliziert werden, falls $\{\tau^j\}\equiv\{\eta^j\}$ ist. Dagegen lassen sich $\mathbf{U}=(\{A^l_k\}, \{A^p_{mn}\}, \ldots, \{A^s_{r_1 \ldots r_w}\}), \mathbf{V}=(\{B^\lambda_\varkappa\}, \{B^\pi_{\mu\nu}\}, \ldots, \{B^\sigma_{\varrho_1 \ldots \varrho_w}\})$ immer multiplizieren und sie bilden eine Gruppe bei den *rein differentiellen* (kurz: differentiellen) Objekten w-ter Klasse, d. h. bei denen, in deren Transformationsgesetz die Koordinaten $\{\xi^i\}, \{\eta^j\}$ selbst nicht figurieren, nur die Derivierten:

$$\mathbf{y}=\mathbf{f}(\mathbf{x}, \{A^l_k\}, \{A^p_{mn}\}, \ldots, \{A^s_{r_1 r_2 \ldots r_w}\}) \qquad (|A^l_k| \neq 0),$$

$$\mathbf{f}[\mathbf{f}(\mathbf{x}, \{A^l_k\}, \{A^p_{mn}\}, \ldots, \{A^s_{r_1 \ldots r_w}\}), \{B^\lambda_\varkappa\}, \{B^\pi_{\mu\nu}\}, \ldots, \{B^\sigma_{\varrho_1 \ldots \varrho_w}\}]=$$

$$=\mathbf{f}(\mathbf{x}, \{C^L_K\}, \{C^P_{MN}\}, \ldots, \{C^S_{R_1 \ldots R_w}\}).$$

Hier ist z. B.

$$C^L_K=B^L_\Lambda A^\Lambda_K=\sum_{\Lambda=1}^{t} B^L_\Lambda A^\Lambda_K, \quad C^P_{MN}=B^P_{ij} A^i_M A^j_N+B^P_k A^k_{MN} \qquad \text{usw.} \tag{3}$$

nach der Derivationsformel zusammengesetzter Funktionen. Wie üblich ist auch hier über den in einem Produkt zweimal vorkommenden Indizes zu summieren.

In dem Fall der eindimensionalen Objekte, mit denen wir uns im § 4 beschäftigen werden, verwenden wir die Bezeichnungen

$$\alpha_k=\frac{d^k \eta}{(d\xi)^k} \qquad (k=1, 2, \ldots, v)$$

und ebenso

$$\beta_k = \frac{d^k\zeta}{(d\eta)^k}, \quad \gamma_k = \frac{d^k\zeta}{(d\xi)^k},$$

so daß bei rein differentiellen Objekten ν-ter Klasse im eindimensionalen Raum

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha_1, \ldots, \alpha_\nu) \qquad (\alpha_1 \neq 0),$$

(4) $$\mathbf{f}[\mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu), \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu] = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\nu)$$

gilt. Hier ist

(5) $$\gamma_1 = \beta_1\alpha_1, \quad \gamma_2 = \beta_2\alpha_1^2 + \beta_1\alpha_2, \quad \gamma_3 = \beta_3\alpha_1^3 + \beta_1\alpha_3 + 3\beta_2\alpha_1\alpha_2 \qquad \text{usw.}$$

Manchmal werden wir direkte Summen und Produkte von Vektoren

(6) $$\mathbf{x}+\mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_{\mathrm{I}} \\ x_{\mathrm{II}} \\ \vdots \\ x_{(u)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_{\mathrm{I}} \\ y_{\mathrm{II}} \\ \vdots \\ y_{(u)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{\mathrm{I}} + y_{\mathrm{I}} \\ x_{\mathrm{II}} + y_{\mathrm{II}} \\ \vdots \\ x_{(u)} + y_{(u)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_{\mathrm{I}}\, y_{\mathrm{I}} \\ x_{\mathrm{II}}\, y_{\mathrm{II}} \\ \vdots \\ x_{(u)}\, y_{(u)} \end{pmatrix}$$

schreiben.

§ 3. Spezielle geometrische Objekte mit nicht weniger Komponenten als Parametern

Wir brauchen den folgenden

HILFSSATZ. *Gibt es für ein fixes* $\mathbf{A} = (a_1, a_2, \ldots, a_\nu)$ *und für jedes*

$$\mathbf{x} = \begin{vmatrix} x_{\mathrm{I}} \\ x_{\mathrm{II}} \\ \vdots \\ x_{(u)} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{X} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{x}_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{(u)} \end{vmatrix}$$

einer u-dimensionalen Punktmenge Π ($u \geqq \nu$) ein und nur ein

(7) $$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_0 \\ \mathbf{Y} \end{pmatrix} = [= \mathbf{g}(\mathbf{x})] \qquad (\mathbf{Y} \in \Sigma)$$

derart, daß

(8) $$[\mathbf{h}(\mathbf{y}) =] = \mathbf{f}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{y}_0 \\ \mathbf{A} \end{pmatrix}, \mathbf{Y}\right] = \mathbf{x}$$

sei, so ist die allgemeine Lösung der Funktionalgleichung

(1) $$\mathbf{f}[\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{U}), \mathbf{V}] = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{U} \circ \mathbf{V})$$

(wo $\mathbf{x}$ *die Menge Π und* $\mathbf{U}, \mathbf{V}$ *eine Halbgruppe $\Sigma \subset \Pi$ des Parameterraumes*

durchläuft) der Gestalt

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{U}) = \mathbf{h}\left[\begin{pmatrix}\mathbf{g}_0(\mathbf{x}) \\ \mathbf{G}(\mathbf{x}) \circ \mathbf{U}\end{pmatrix}\right] \tag{9}$$

(wo $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix}\mathbf{g}_0(\mathbf{x}) \\ \mathbf{G}(\mathbf{x})\end{pmatrix}$ *eine umkehrbar eindeutige Vektorfunktion mit der inversen Funktion* $\mathbf{h}$ *ist). — Im Fall* $u = v$ *fehlt* $\mathbf{g}_0, \mathbf{y}_0$ *aus* (9), (7), (8) *usw. —*

Dies ist also unter den gemachten Voraussetzungen das Transformationsgesetz der v*-parametrigen speziellen Objekte von* u *Komponenten* ($u \geqq v$), *falls der Parameterraum unter der aus der Zusammensetzung der Koordinatentransformationen entspringenden Multiplikation eine (Halb-) Gruppe bildet.*

Hier wurde der v-dimensionale Parameterraum im u-dimensionalen Komponenten-Raum eingebettet.

Dies ist eine unwesentlich geänderte Gestalt des Satzes 1 von [3] und kann durch Einsetzen von

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix}\mathbf{y}_0 \\ \mathbf{A}\end{pmatrix}, \quad \mathbf{U} = \mathbf{Y} \in \Sigma$$

in (1) mit Rücksicht auf (7)—(8), bzw. von (9) in (1) mit Rücksicht auf die Assoziativität von $\mathbf{U} \circ \mathbf{V}$ leicht bewiesen werden.

Hieraus entspringen u. a. folgende *Korollarien:*

1. *Gibt es für fixe* $\{\underset{0}{A_k^l}\}$ $(k, l = 1, 2, \ldots, t;\ |\underset{0}{A_k^l}| \neq 0)$ *und für jedes* $\mathbf{x}$ *einer* u*-dimensionalen Punktmenge* ($u \geqq t^2$) *ein und nur ein*

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix}\mathbf{y}_0 \\ \{Y_i^j\}\end{pmatrix} \qquad (|Y_i^j| \neq 0)$$

derart, daß

$$\mathbf{f}\left[\begin{pmatrix}\mathbf{y}_0 \\ \{\underset{0}{A_k^l}\}\end{pmatrix}, \ \{Y_i^j\}\right] = \mathbf{x}$$

sei, so ist die allgemeine Lösung von

$$\mathbf{f}[\mathbf{f}(\mathbf{x}, \{A_i^j\}), \{B_k^l\}] = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \{B_L^J A_K^L\}) \tag{10}$$

der Gestalt

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \{A_i^j\}) = \mathbf{h}\left[\begin{pmatrix}\mathbf{g}_0(\mathbf{x}) \\ \{A_l^j G_i^l(\mathbf{x})\}\end{pmatrix}\right],$$

wo $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix}\mathbf{g}_0(\mathbf{x}) \\ \{G_i^j(\mathbf{x})\}\end{pmatrix}$ *eine umkehrbar eindeutige Vektorfunktion mit* $|G_i^j(\mathbf{x})| \neq 0$ *und* $\mathbf{h}$ *ihre Inverse ist.*

Unter diesen Voraussetzungen ist also dies das Transformationsgesetz der rein differentiellen Objekte erster Klasse mit u Komponenten im t-dimensionalen Raum.

2. *Gibt es für fixe* $\{\underset{0}{A_n^p}\}, \{\underset{0}{A_{qr}^s}\}$ $(|\underset{0}{A_n^p}| \neq 0)$ *und für jedes* $\mathbf{x}$ *einer u-dimensionalen Punktmenge* $\left(u \geq t\left[t+\binom{t+1}{2}\right] = \frac{t^3+3t^2}{2}\right)$ *ein und nur ein*

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_0 \\ \{Y_i^j\} \\ \{Y_{kl}^m\} \end{pmatrix} \qquad (|Y_i^j| \neq 0)$$

derart, daß

$$\mathbf{f}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{y}_0 \\ \{\underset{0}{A_n^p}\} \\ \{\underset{0}{A_{qr}^s}\} \end{pmatrix}, \{Y_i^j\}, \{Y_{kl}^m\}\right] = \mathbf{x}$$

sei, so ist die allgemeine Lösung von

(11) $\mathbf{f}[\mathbf{f}(\mathbf{x}, \{A_i^j\}, \{A_{kl}^m\}), \{B_n^p\}, \{B_{qr}^s\}] = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \{B_I^J A_N^I\}, \{B_{KL}^M A_Q^K A_R^L + B_P^M A_{QR}^P\})$

der Gestalt

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \{A_n^j\}, \{A_{qr}^m\}) = \mathbf{h}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{g}_0(\mathbf{x}) \\ \{A_i^j G_n^i(\mathbf{x})\} \\ \{A_{kl}^m G_q^k(\mathbf{x}) G_r^l(\mathbf{x}) + A_p^m G_{qr}^p(\mathbf{x})\} \end{pmatrix}\right],$$

wo $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \mathbf{g}_0(\mathbf{x}) \\ \{G_n^j(\mathbf{x})\} \\ \{G_{qr}^m(\mathbf{x})\} \end{pmatrix}$ *eine umkehrbar eindeutige Vektorfunktion mit* $|G_n^j(\mathbf{x})| \neq 0$ *und* $\mathbf{h}$ *ihre Inverse ist.*

Unter diesen Voraussetzungen ist also dies das Transformationsgesetz der rein differentiellen Objekte zweiter Klasse mit u Komponenten im t-dimensionalen Raum.

((10), (11) folgen aus (2), (3).)

Offenbar können unter ähnlichen Bedingungen die rein differentiellen Objekte w-ter Klasse im t-dimensionalen Raum ebenso erledigt werden, falls sie $u \geq t\left[t+\binom{t+1}{2}+\cdots+\binom{t+w-1}{w}\right] = t\left[\binom{t+w}{w}-1\right]$ Komponenten haben.

Daß auch die nicht rein differentiellen Objekte, d. h. solche spezielle Objekte, bei denen die durch die Zusammensetzung der Koordinatentransformationen generierte Multiplikation nicht immer zwischen zwei Punkten des Parameterraumes durchfürbar sind, — mit unseren Methoden gleichfalls behandelt werden können, zeigen wir durch den Beweis der folgenden Aussage:

3. *Gibt es für fixe* $\{\alpha^k\}$ $(k=1,\ldots,t)$, $\mathbf{A}=(a_1,\ldots,a_v)$ *und für jedes* $\mathbf{x}$ *einer u-dimensionalen Punktmenge* $\left(u \geqq t+r = t\binom{t+w}{w}\right)$ *und für alle* $\{\eta^j\}$ *der t-dimensionalen Projektion dieser Punktmenge ein und nur ein*

$$\mathbf{t}=\begin{pmatrix}\mathbf{t}_0\\ \{\tau^i\}\\ \mathbf{T}\end{pmatrix}=[=\mathbf{g}(\mathbf{x},\{\eta^j\})]$$

derart, daß

$$\text{(12)}\qquad [\mathbf{h}(\mathbf{t},\{\eta^j\})=]=\mathbf{f}\left[\begin{pmatrix}\mathbf{t}_0\\ \{\alpha^k\}\\ \mathbf{A}\end{pmatrix},\{\tau^i\},\{\eta^j\},\mathbf{T}\right]=\mathbf{x}$$

sei, so ist die allgemeine Lösung von

$$\text{(13)}\qquad \mathbf{f}[\mathbf{f}(\mathbf{x},\{\xi^i\},\{\eta^j\},\mathbf{U}),\{\eta^j\},\{\zeta^k\},\mathbf{V}]=\mathbf{f}(\mathbf{x},\{\xi^i\},\{\zeta^k\},\mathbf{U}\circ\mathbf{V})$$

der Gestalt

$$\text{(14)}\qquad \mathbf{f}(\mathbf{x},\{\xi^i\},\{\eta^j\},\mathbf{U})=\mathbf{h}\left[\begin{pmatrix}\mathbf{g}_0(\mathbf{x},\{\xi^i\})\\ \{g^k(\mathbf{x},\{\xi^i\})\}\\ \mathbf{G}(\mathbf{x},\{\xi^i\})\circ\mathbf{U}\end{pmatrix},\{\eta^j\}\right],$$

wo $\mathbf{y}=\mathbf{g}(\mathbf{x},\{\xi^i\})=\begin{pmatrix}\mathbf{g}_0\\ \{g^k\}\\ \mathbf{G}\end{pmatrix}$ *eine Vektor-Vektorfunktion mit den Parametern* $\{\xi^i\}$ *ist, deren eindeutige Inverse bezüglich* $\mathbf{x}$ *mit* $\mathbf{x}=\mathbf{h}(\mathbf{y},\{\xi^i\})$ *bezeichnet wurde.*

Dies ist also unter den obigen Bedingungen das Transformationsgesetz der nicht rein differentiellen Objekte w-ter Klasse im t-dimensionalen Raum mit $u\geqq t\binom{t+w}{w}$ *Komponenten.*

Hier wurde (13) aus (2) durch die Bezeichnungen $\mathbf{U}=(\{A^l_k\},\ldots,\{A^s_{r_1\ldots r_w}\})$, $\mathbf{V}=(\{B^\lambda_\varkappa\},\ldots,\{B^\sigma_{\varrho_1\ldots\varrho_w}\})$ gewonnen. Diese lassen sich bereits immer multiplizieren ($|A^l_k|\neq 0$, $|B^\lambda_\varkappa|\neq 0$). Es ist bemerkenswert, daß hier nicht $u\geqq t\binom{t+w}{w}+t$, sondern nur $u\geqq t\binom{t+w}{w}$ vorausgesetzt wurde.

Beweis. Die Assoziativität von $\mathbf{U}\circ\mathbf{V}$ sichert, daß (14) die Gleichung (13) tatsächlich erfüllt. Umgekehrt folgt durch Einsetzen von

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}\mathbf{t}_0\\ \{\alpha^k\}\\ \mathbf{A}\end{pmatrix},\quad \{\xi^i\}=\{\tau^i\},\quad \mathbf{U}=\mathbf{T}$$

in (13) wegen (12) das Bestehen von (14) sofort, w. z. b. w.

Diesbezüglich vgl. übrigens die Arbeiten [8], [11], wo die Zurückführbarkeit der nicht rein differentiellen Objekte auf rein differentielle bewiesen wurde. Da diese Werke z. T. schwer zugänglich sind, wiederholen wir kurz mit unseren Bezeichnungen diese Betrachtung:

Wir schreiben:

$$\bar{\mathbf{h}}(\mathbf{z}, \{\eta^j\}) = \mathbf{f}(\mathbf{z}, \{\alpha^q\}, \{\eta^j\}, \{\delta^l_k\}, \{0\}, \ldots, \{0\}),$$

$$\mathbf{y} = \bar{\mathbf{g}}(\mathbf{x}, \{\xi^i\}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \{\xi^i\}, \{\alpha^q\}, \{\delta^l_k\}, \{0\}, \ldots, \{0\})$$

$$\left(\delta^l_k = \begin{cases} 1 \text{ für } k = l, \\ 0 \text{ für } k \neq l; \end{cases} \quad \{\alpha^q\} \text{ konstant}\right),$$

$$\mathbf{z} = \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{y}, \{A^l_k\}, \{A^p_{mn}\}, \ldots, \{A^s_{r_1 \ldots r_u}\}) = \mathbf{f}(\mathbf{y}, \{\alpha^q\}, \{\alpha^q\}, \{A^l_k\}, \{A^p_{mn}\}, \ldots, \{A^s_{r_1 \ldots r_u}\}).$$

Das letztere ist eben die Transformationsformel eines rein differentiellen Objektes. Durch wiederholtes Anwenden von (2) wird

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \{\xi^i\}, \{\eta^j\}, \{A^l_k\}, \{A^p_{mn}\}, \ldots, \{A^s_{r_1 \ldots r_u}\}) =$$
$$= \bar{\mathbf{h}}(\bar{\mathbf{f}}[\bar{\mathbf{g}}(\mathbf{x}, \{\xi^i\}), \{A^l_k\}, \{A^p_{mn}\}, \ldots, \{A^s_{r_1 \ldots r_u}\}], \{\eta^j\}).$$

Dies erfüllt auch (2), so daß damit die nicht rein differentiellen geometrischen Objekte auf rein differentielle zurückgeführt wurden. Da nämlich bei Voraussetzung von

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \{\xi^i\}, \{\xi^i\}, \{\delta^l_k\}, \{0\}, \ldots, \{0\}) = \mathbf{x}$$

(die identische Koordinatentransformation ändert das Objekt nicht)

$$\bar{\mathbf{g}}[\bar{\mathbf{h}}(\mathbf{z}, \{\xi^i\}), \{\xi^i\}] = \mathbf{z}$$

gilt, also $\bar{\mathbf{h}}(\mathbf{z}, \{\xi^i\})$ die Inverse von $\bar{\mathbf{g}}(\mathbf{x}, \{\xi^i\})$ bezüglich $\mathbf{x}$ ist, kann das soeben Bewiesene folgenderweise ausgesprochen werden:

Wenn die Koordinaten den Komponenten eines nicht rein differentiellen Objektes hinzugenommen werden, so wird es mit einem Objekt äquivalent, das aus einem rein differentiellen Objekt und aus den Koordinaten besteht.

Deshalb beschäftigen wir uns im folgenden nur mit rein differentiellen Objekten.

§ 4. Objekte erster, zweiter und dritter Klasse von beliebiger Komponentenzahl im eindimensionalen Raum

1. Aus dem Hilfssatz bzw. aus dem Korollar 1 (vgl. auch [1]) folgt sofort der

SATZ 1. *Genügt* $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha_1)$ *für* $\mathbf{x} \in \Pi$ *und für die* $\alpha_1 \neq 0$ *einer Halbgruppe* $A \subset \Pi$ *der Funktionalgleichung*

(15) $$\mathbf{f}[\mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha_1), \beta_1] = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \beta_1 \alpha_1)$$

und ist für solche $\mathbf{x}$

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}\left[\begin{pmatrix}\mathbf{y}_0\\ a_1\end{pmatrix}, y_1\right] \qquad (a_1 \textit{ konstant}, \ 0 \neq y_1 \in A)$$

bezüglich $\mathbf{y} = \begin{pmatrix}\mathbf{y}_0\\ y_1\end{pmatrix}$ *eindeutig lösbar, so ist für diese* $\mathbf{x}$ *und* α_1

$$\text{(16)} \qquad \mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha_1) = \mathbf{h}\left[\begin{pmatrix}\mathbf{g}_0(\mathbf{x})\\ g_1(\mathbf{x})\alpha_1\end{pmatrix}\right],$$

wo $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix}\mathbf{g}_0(\mathbf{x})\\ g_1(\mathbf{x})\end{pmatrix}$ $(0 \neq g_1(\mathbf{x}) \in A)$ *eine umkehrbar eindeutige Vektorfunktion mit der Inversen* $\mathbf{h}$ *ist. Im Fall* $u = \dim \mathbf{x} = 1$ *fehlt* $\mathbf{g}_0(\mathbf{x})$ *aus* (16). (16) *genügt der Gleichung* (15) *und auch der Gleichung*

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, 1) = \mathbf{x}.$$

Unter diesen Bedingungen ist also (16) *das Transformationsgesetz der differentiellen geometrischen Objekte erster Klasse mit u Komponenten im eindimensionalen Raum.*

2. Ebenfalls aus dem Hilfssatz bzw. aus dem Korollar 2 folgt für Objekte zweiter Klasse, daß falls

$$u = \dim \mathbf{x} \geqq 2$$

und

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}\left[\begin{pmatrix}\mathbf{y}_0\\ a_1\\ a_2\end{pmatrix}, y_1, y_2\right] \qquad (y_1 \neq 0)$$

bezüglich $\mathbf{y} = \begin{pmatrix}\mathbf{y}_0\\ y_1\\ y_2\end{pmatrix}$ eindeutig lösbar ist, so sind die Lösungen der Funktionalgleichung (vgl. (4), (5))

$$\text{(17)} \qquad \mathbf{f}[\mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha_1, \alpha_2), \beta_1, \beta_2] = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \beta_1\alpha_1, \beta_2\alpha_1^2 + \beta_1\alpha_2)$$

der Objekte zweiter Klasse der Gestalt

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{h}\left[\begin{pmatrix}\mathbf{g}_0(\mathbf{x})\\ \alpha_1 g_1(\mathbf{x})\\ \alpha_2 g_1(\mathbf{x})^2 + \alpha_1 g_2(\mathbf{x})\end{pmatrix}\right]$$

$$\left(g_1(\mathbf{x}) \neq 0, \ \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix}\mathbf{g}_0(\mathbf{x})\\ g_1(\mathbf{x})\\ g_2(\mathbf{x})\end{pmatrix}, \ \mathbf{g}[\mathbf{h}(\mathbf{y})] = \mathbf{y}\right).$$

Führen wir die neuen Funktionen

$$\bar{\mathbf{h}}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{y}_0 \\ y_1 \\ \dfrac{y_2}{y_1^2} \end{pmatrix}\right] = \mathbf{h}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{y}_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right], \quad \begin{aligned} \bar{\mathbf{g}}_0(\mathbf{x}) &= \mathbf{g}_0(\mathbf{x}), \\ \bar{g}_1(\mathbf{x}) &= g_1(\mathbf{x}) \neq 0, \\ \bar{g}_2(\mathbf{x}) &= \frac{g_2(\mathbf{x})}{g_1(\mathbf{x})} \end{aligned}$$

ein, so erhalten wir (die Oberstriche wieder weggelassen) den

SATZ 2. *Genügt* $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha_1, \alpha_2)$ *für* $\mathbf{x} \in \Pi$ *und für die* $\alpha_1 \neq 0, \alpha_2$ *einer Halbgruppe* $A \subset \Pi$ *der Gleichung* (17), *ist ferner für solche* $\mathbf{x}$

$$\mathbf{f}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{y}_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, y_1, y_2\right] = \mathbf{x} \qquad (a_1, a_2 \textit{ konstant, } \{y_1 \neq 0, y_2\} \in A)$$

bezüglich $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ *eindeutig lösbar, so ist für diese* $\mathbf{x}$ *und* α_1, α_2

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{h}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{g}_0(\mathbf{x}) \\ g_1(\mathbf{x})\alpha_1 \\ \dfrac{g_2(\mathbf{x})}{\alpha_1} + \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1^2} \end{pmatrix}\right], \tag{18}$$

wo $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \mathbf{g}_0(\mathbf{x}) \\ g_1(\mathbf{x}) \\ g_2(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$ $(g_1(\mathbf{x}) \neq 0)$ *eine umkehrbar eindeutige Vektorfunktion mit der Inversen* $\mathbf{h}$ *ist.* (18) *erfüllt die Gleichung* (17) *sowie die Gleichung*

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, 1, 0) = \mathbf{x}.$$

(18) *ist also unter diesen Bedingungen das Transformationsgesetz der rein differentiellen geometrischen Objekte zweiter Klasse mit* u *Komponenten im eindimensionalen Raum.*

Wir ließen im Text des Satzes die Bedingung $u = \dim \mathbf{x} \geqq 2$ fort, da dasselbe Resultat für $u = 1$ $(y_1 = 1)$ in [2] schon bewiesen wurde. Für $u = \dim \mathbf{x} = 2, 1$ ist nämlich (18) so zu verstehen, daß darin $\mathbf{g}_0$ bzw. $\mathbf{g}_0, g_1$ fehlen, und ähnlich in den übrigen Formeln.

Ganz ähnlich lassen sich die Objekte r-ter Klasse mit u Komponenten im eindimensionalen Raum unter der Untergruppe

$$\eta = \varphi(\xi), \quad \varphi'(\xi) \neq 0, \quad \varphi''(\xi) = \cdots = \varphi^{(r-1)}(\xi) = 0$$

von Koordinatentransformationen erledigen, indem man die Transformations-

formel

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha_1, 0, \ldots, 0, \alpha_v) = \mathbf{h}\left[\begin{Bmatrix} \mathbf{g}_0(\mathbf{x}) \\ g_1(\mathbf{x})\alpha_1 \\ \dfrac{g_v(\mathbf{x})}{\alpha_1^{v-1}} + \dfrac{\alpha_v}{\alpha_1^v} \end{Bmatrix}\right]$$

$$\left(\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{Bmatrix} \mathbf{g}_0(\mathbf{x}) \\ g_1(\mathbf{x}) \\ g_v(\mathbf{x}) \end{Bmatrix}, \quad g_1(\mathbf{x}) \neq 0, \quad \mathbf{g}[\mathbf{h}(\mathbf{y})] = \mathbf{y}\right)$$

erhält.

3. Für Objekte dritter Klasse mit der Funktionalgleichung (vgl. (4))

$$\mathbf{f}[\mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \beta_1, \beta_2, \beta_3] = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \beta_1\alpha_1, \beta_2\alpha_1^2 + \beta_1\alpha_2, \beta_3\alpha_1^3 + \beta_1\alpha_3 + 3\beta_2\alpha_1\alpha_2) \tag{19}$$

ergibt unser Hilfssatz 1 unmittelbares Ergebnis nur im Fall $u = \dim \mathbf{x} \geq 3$: Ist

$$\mathbf{f}\left[\begin{Bmatrix} \mathbf{y}_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}, y_1, y_2, y_3\right] = \mathbf{x} \qquad \left[\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \text{ konstant}, \ y_1 \neq 0\right]$$

bezüglich $\mathbf{y} = \begin{Bmatrix} \mathbf{y}_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix}$ eindeutig lösbar, so ist

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \mathbf{h}\left[\begin{Bmatrix} \mathbf{g}_0(\mathbf{x}) \\ \alpha_1 g_1(\mathbf{x}) \\ \alpha_2 g_1(\mathbf{x})^2 + \alpha_1 g_2(\mathbf{x}) \\ \alpha_3 g_1(\mathbf{x})^3 + \alpha_1 g_3(\mathbf{x}) + 3\alpha_2 g_1(\mathbf{x}) g_2(\mathbf{x}) \end{Bmatrix}\right]$$

$$\left(\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{Bmatrix} \mathbf{g}_0(\mathbf{x}) \\ g_1(\mathbf{x}) \\ g_2(\mathbf{x}) \\ g_3(\mathbf{x}) \end{Bmatrix}, \quad g_1(\mathbf{x}) \neq 0, \quad \mathbf{g}[\mathbf{h}(\mathbf{y})] = \mathbf{y}\right).$$

Wir führen die neuen Funktionen

$$\overline{\mathbf{h}}\left[\begin{Bmatrix} \mathbf{y}_0 \\ y_1 \\ \dfrac{y_2}{y_1^2} \\ \dfrac{y_3}{y_1^3} - \dfrac{3}{2}\dfrac{y_2^2}{y_1^4} \end{Bmatrix}\right] = \mathbf{h}\left[\begin{Bmatrix} \mathbf{y}_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix}\right], \qquad \begin{aligned} \overline{\mathbf{g}}_0(\mathbf{x}) &= \mathbf{g}_0(\mathbf{x}), \\ \overline{g}_1(\mathbf{x}) &= g_1(\mathbf{x}) \neq 0, \\ \overline{g}_2(\mathbf{x}) &= g_1(\mathbf{x})^{-2} g_2(\mathbf{x}), \\ \overline{g}_3(\mathbf{x}) &= g_1(\mathbf{x})^{-3} g_3(\mathbf{x}) - \frac{3}{2} g_1(\mathbf{x})^{-4} g_2(\mathbf{x})^2 \end{aligned}$$

ein, und erhalten nach Weglassung der Striche die Formel

$$\text{(20)} \qquad \mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \mathbf{h}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{g}_0(\mathbf{x}) \\ g_1(\mathbf{x})\alpha_1 \\ \dfrac{g_2(\mathbf{x})}{\alpha_1} + \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1^2} \\ \dfrac{g_3(\mathbf{x})}{\alpha_1^2} + \dfrac{\alpha_3}{\alpha_3^1} - \dfrac{3}{2}\dfrac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4} \end{pmatrix}\right].$$

Für $u = \dim \mathbf{x} = 1$ wurde die bezügliche Formel in [2] schon bewiesen. Es bleibt also nur noch der Fall $u = \dim \mathbf{x} = 2$ übrig. Diesbezüglich untersuchen wir zuerst den Spezialfall $\alpha_1 = 1$, wofür (19) zu

$$\mathbf{f}[\mathbf{f}(\mathbf{x}, 1, \alpha_2, \alpha_3), 1, \beta_2, \beta_3] = \mathbf{f}(\mathbf{x}, 1, \alpha_2 + \beta_2, \alpha_3 + 3\alpha_2\beta_2 + \beta_3)$$

wird. Dies ist wieder eine Gleichung der Gestalt (1), wofür der Hilfssatz besagt, daß falls

$$\mathbf{f}\left[\begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, 1, y_2, y_3\right] = \mathbf{x}$$

bezüglich $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ eindeutig lösbar ist, so wird

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, 1, \alpha_2, \alpha_3) = \mathbf{h}\begin{pmatrix} g_2(\mathbf{x}) + \alpha_2 \\ g_3(\mathbf{x}) + 3g_2(\mathbf{x})\alpha_2 + \alpha_3 \end{pmatrix} \qquad \left(\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} g_2(x) \\ g_3(x) \end{pmatrix}, \mathbf{g}[\mathbf{h}(\mathbf{y})] = \mathbf{y}\right),$$

oder mit

$$\bar{\mathbf{h}}\left[\begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 - \dfrac{3}{2}y_2^2 \end{pmatrix}\right] = \mathbf{h}\left[\begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right], \qquad \begin{aligned} \bar{g}_2(\mathbf{x}) &= g_2(\mathbf{x}), \\ \bar{g}_3(\mathbf{x}) &= g_3(\mathbf{x}) - \frac{3}{2}g_2(\mathbf{x})^2, \end{aligned}$$

$$\text{(21)} \qquad \mathbf{f}(\mathbf{x}, 1, \alpha_2, \alpha_3) = \bar{\mathbf{h}}\left[\begin{pmatrix} \bar{g}_2(\mathbf{x}) + \alpha_2 \\ \bar{g}_3(\mathbf{x}) + \alpha_3 - \dfrac{3}{2}\alpha_2^2 \end{pmatrix}\right].$$

Um nun $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ zu bestimmen, nehmen wir in Betracht, daß aus (19)

$$\text{(22)} \qquad \mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \mathbf{f}\left[\mathbf{f}\left(\mathbf{x}, 1, \frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right), \alpha_1, 0, 0\right] = \mathbf{f}\left[\mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha_1, 0, 0), 1, \frac{\alpha_2}{\alpha_1^2}, \frac{\alpha_3}{\alpha_1^3}\right]$$

folgt, also mit (21) und mit den Bezeichnungen

$$\mathbf{y} = \bar{\mathbf{g}}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1} \\ \dfrac{\alpha_3}{\alpha_1} - \dfrac{3}{2}\dfrac{\alpha_2^2}{\alpha_2^2} \end{pmatrix},$$

sowie mit

$$\overline{\mathbf{g}}(\mathbf{f}[\overline{\mathbf{h}}(\mathbf{y}), \alpha_1, 0, 0]) = \overline{\mathbf{f}}(\mathbf{y}, \alpha_1), \tag{23}$$

wofür wegen (19) offenbar

$$\overline{\mathbf{f}}[\overline{\mathbf{f}}(\mathbf{y}, \alpha_1), \beta_1] = \overline{\mathbf{f}}(\mathbf{y}, \beta_1 \alpha_1) \tag{24}$$

gilt, erhalten wir

$$\overline{\mathbf{f}}(\mathbf{y} + \mathbf{z}, \alpha_1) = \overline{\mathbf{f}}(\mathbf{y}, \alpha_1) + \mathbf{z} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1^{-1} \\ \alpha_1^{-2} \end{pmatrix}$$

(vgl. (6)). Wir setzen hierin $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und erhalten mit $\overline{\mathbf{f}}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_1\right] = \mathbf{c}(\alpha_1)$

$$\overline{\mathbf{f}}(\mathbf{z}, \alpha_1) = \mathbf{c}(\alpha_1) + \mathbf{z} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1^{-1} \\ \alpha_1^{-2} \end{pmatrix}. \tag{25}$$

Dies substituieren wir in (24) zurück:

$$\mathbf{c}(\alpha_1) \cdot \begin{pmatrix} \beta_1^{-1} \\ \beta_1^{-2} \end{pmatrix} + \mathbf{y} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1^{-1} \beta_1^{-1} \\ \alpha_1^{-2} \beta_1^{-2} \end{pmatrix} + \mathbf{c}(\beta_1) = \mathbf{c}(\alpha_1 \beta_1) + \mathbf{y} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1^{-1} \beta_1^{-1} \\ \alpha_1^{-2} \beta_1^{-2} \end{pmatrix}.$$

Hieraus folgt aus Symmetriegründen

$$\mathbf{c}(\alpha_1) \cdot \begin{pmatrix} \beta_1^{-1} \\ \beta_1^{-2} \end{pmatrix} + \mathbf{c}(\beta_1) = \mathbf{c}(\alpha_1 \beta_1) = \mathbf{c}(\alpha_1) + \mathbf{c}(\beta_1) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1^{-1} \\ \alpha_1^{-2} \end{pmatrix}$$

und durch Trennung der Veränderlichen

$$\mathbf{c}(\alpha_1) \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{1}{1 - \alpha_1^{-1}} \\ \dfrac{1}{1 - \alpha_1^{-2}} \end{pmatrix} = \mathbf{c}(\beta_1) \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{1}{1 - \beta_1^{-1}} \\ \dfrac{1}{1 - \beta_1^{-2}} \end{pmatrix} = \mathbf{c}, \quad \mathbf{c}(\alpha_1) = \mathbf{c} \cdot \begin{pmatrix} 1 - \alpha_1^{-1} \\ 1 - \alpha_1^{-2} \end{pmatrix} = \mathbf{c} - \mathbf{c} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1^{-1} \\ \alpha_1^{-2} \end{pmatrix}.$$

So wird aus (25)

$$\overline{\mathbf{f}}(\mathbf{z}, \alpha_1) = \mathbf{c} + (\mathbf{z} - \mathbf{c}) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1^{-1} \\ \alpha_1^{-2} \end{pmatrix}$$

und aus (23)

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha_1, 0, 0) = \overline{\mathbf{h}}\left[\mathbf{c} + [\overline{\mathbf{g}}(\mathbf{x}) - \mathbf{c}] \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1^{-1} \\ \alpha_1^{-2} \end{pmatrix}\right],$$

oder mit den neuen Bezeichnungen $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \overline{\mathbf{g}}(\mathbf{x}) - \mathbf{c}$, $\mathbf{h}(\mathbf{y}) = \overline{\mathbf{h}}(\mathbf{y} + \mathbf{c})$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha_1, 0, 0) = \mathbf{h}\left[\mathbf{g}(\mathbf{x}) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1^{-1} \\ \alpha_1^{-2} \end{pmatrix}\right] = \mathbf{h}\left[\begin{pmatrix} \dfrac{g_2(\mathbf{x})}{\alpha_1} \\ \dfrac{g_3(\mathbf{x})}{\alpha_1^2} \end{pmatrix}\right],$$

während (21) zu

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, 1, \alpha_2, \alpha_3) = \mathbf{h}\left[\begin{pmatrix} g_2(\mathbf{x}) + \alpha_2 \\ g_3(\mathbf{x}) + \alpha_3 - \frac{3}{2}\alpha_2^2 \end{pmatrix}\right]$$

wird. Schreiben wir alldies in (22) ein, so erhalten wir endlich

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \mathbf{h}\left[\begin{pmatrix} \frac{g_2(\mathbf{x})}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1^2} \\ \frac{g_3(\mathbf{x})}{\alpha_1^2} + \frac{\alpha_3}{\alpha_1^3} - \frac{3}{2}\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4} \end{pmatrix}\right]. \tag{26}$$

Die Zusammenfassung von (20) und (26) ergibt den

SATZ 3. *Genügt* $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ *für* $\mathbf{x} \in \Pi$ *und für die* $\alpha_1 \neq 0, \alpha_2, \alpha_3$ *einer Halbgruppe* $A \subset \Pi$ *der Gleichung* (19), *ist ferner für solche* $\mathbf{x}$

$$\mathbf{f}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{y}_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, y_1, y_2, y_3\right] = \mathbf{x} \qquad \left\{bzw.\ \mathbf{f}\left[\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, y_1, y_2, y_3\right] = \mathbf{x}\right\}$$

bzw.

$$\mathbf{f}\left[\begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, 1, y_2, y_3\right] = \mathbf{x}$$

bzw.

$$f(a_3, 1, 0, y_3) = \mathbf{x} \qquad \left\{a_1, a_2, a_3\ \textit{konstant};\ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ y_3 \end{pmatrix} \in A\right\}$$

bezüglich $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ $\left\{bzw.\ \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\ bzw.\ \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\ bzw.\ y = y_3\right\}$ *(je nachdem* $u = \dim \mathbf{x} > 3, = 3, = 2, = 1$*) eindeutig lösbar, so ist für diese* $\mathbf{x}$ *und* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \mathbf{h}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{g}_0(\mathbf{x}) \\ g_1(\mathbf{x})\alpha_1 \\ \frac{g_1(\mathbf{x})}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1^2} \\ \frac{g_3(\mathbf{x})}{\alpha_1^2} + \frac{\alpha_3}{\alpha_1^3} - \frac{3}{2}\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4} \end{pmatrix}\right] \tag{20}$$

$$\left\{\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \mathbf{g}_0(\mathbf{x}) \\ g_1(\mathbf{x}) \\ g_2(\mathbf{x}) \\ g_3(\mathbf{x}) \end{pmatrix},\ g_1 \neq 0,\ \mathbf{g}[\mathbf{h}(\mathbf{y})] = \mathbf{y}\right\}.$$

In den Fällen $u = \dim \mathbf{x} = 3, 2, 1$ *fehlen die Zeilen mit* $\mathbf{g}_0$ *bzw.* $\mathbf{g}_0, g_1$ *bzw.* $\mathbf{g}_0, g_1, g_2$. — (20) *erfüllt* (19) *sowie die Gleichung*

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, 1, 0, 0) = x.$$

(20) *ist also unter diesen Bedingungen das Transformationsgesetz der rein differentiellen geometrischen Objekte dritter Klasse mit beliebig vielen Komponenten im eindimensionalen Raum.*

Wenn man (20) mit den Resultaten von [2] II vergleicht, sieht man, daß bei unseren Voraussetzungen jedes eindimensionale Objekt dritter Klasse mit beliebiger Komponentenzahl einem Objekte äquivalent ist, dessen letzte bzw. vorletzte bzw. die davorstehende Komponente bzw. die übrigen Komponenten sich als eindimensionale Objekte mit einer Komponente und von dritter bzw. zweiter bzw. erster Klasse transformieren bzw. konstant bleiben (sich als Objekte nullter Klasse transformieren). Man sieht auch, daß sich (18) und (16) aus (20) durch Weglassung der letzten bzw. der beiden letzten Zeilen ergeben.

4. Die bisherigen Sätze (insbesondere der Satz 1) haben den Mangel, daß sie im Spezialfall $u = 1$ (eine Komponente) ein bekanntes Objekt, nämlich die Weylsche Dichte mit dem Transformationsgesetz

$$\bar{z} = f(z, \alpha_1) = z|\alpha_1|$$

nicht enthalten (bzw. nur für positive α_1 enthalten, wo sie mit der gewöhnlichen Dichte $\bar{z} = z\alpha_1$ zusammenfällt), da die Voraussetzung der *eindeutigen* Lösbarkeit von

$$x = f(a_1, y_1) = a_1|y_1| \qquad (y_1 \neq 0)$$

bezüglich y_1 nicht erfüllt ist, falls *alle* nicht-verschwindende reelle y_1 erlaubt sind. Dagegen ist die Eindeutigkeit der Lösung unter den *positiven* y_1 gesichert, jedenfalls besteht dann die *Lösbarkeit* selbst nur für $\operatorname{sg} x = \operatorname{sg} a_1$. Dies gibt den Gedanken, unsere Bedingungen in diesem Sinn zu schwächern. Wir beweisen so den

Satz 4. *Genügt* $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ *für jedes* $\mathbf{x} \in X_- \cup X_+$ $(X_- \cap X_+ = 0)$ *und für jedes* $\alpha_1 \neq 0, \alpha_2, \alpha_3$ *der Gleichung* (19) *und ist außerdem*

$$\mathbf{f}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{y}_0 \\ a_{\pm 1} \\ a_{\pm 2} \\ a_{\pm 3} \end{pmatrix}, y_1, y_2, y_3\right] = \mathbf{x} \tag{27}$$

für $\mathbf{x} \in X_\pm$ *bezüglich* $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ *mit* $y_1 > 0$ *eindeutig lösbar (mit* $y_1 = 1$ *bzw.*

$y_1 = 1, y_2 = 0$ *für* $u = \dim \mathbf{x} = 2, 1$), *so ist für diese* $\mathbf{x}$ *und* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ *bei* $\alpha_1 > 0$ $f(\mathbf{x}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ *durch* (20), *für* $\alpha_1 < 0$ *dagegen durch*

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \mathbf{h}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{e}_0[\mathbf{g}_0(\mathbf{x})] \\ -e_1[\mathbf{g}_0(\mathbf{x})]g_1(\mathbf{x})\alpha_1 \\ -\dfrac{e_2[\mathbf{g}_0(\mathbf{x})]}{g_1(\mathbf{x})\alpha_1} + \dfrac{g_2(\mathbf{x})}{\alpha_1} + \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1^2} \\ \dfrac{e_3[\mathbf{g}_0(\mathbf{x})]}{g_1(\mathbf{x})^2\alpha_1^2} + \dfrac{g_3(\mathbf{x})}{\alpha_1^2} + \dfrac{\alpha_3}{\alpha_1^3} - \dfrac{3}{2}\dfrac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4} \end{pmatrix}\right] \tag{28}$$

$$(g_1(\mathbf{x}), e_1(\mathbf{y}_0) \neq 0)$$

dargestellt, wo $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \mathbf{g}_0(\mathbf{x}) \\ g_1(\mathbf{x}) \\ g_2(\mathbf{x}) \\ g_3(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$ *eine umkehrbar eindeutige Vektorfunktion ist,*

und bezüglich $\mathbf{e}(\mathbf{y}_0) = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_0(\mathbf{y}_0) \\ e_1(\mathbf{y}_0) \\ e_2(\mathbf{y}_0) \\ e_3(\mathbf{y}_0) \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_0[\mathbf{e}_0(\mathbf{y}_0)] &= \mathbf{y}_0 \\ e_1[\mathbf{e}_0(\mathbf{y}_0)] &= e_1(\mathbf{y}_0)^{-1} \\ e_2[\mathbf{e}_0(\mathbf{y}_0)] &= e_2(\mathbf{y}_0)e_1(\mathbf{y}_0) \\ e_3[\mathbf{e}_0(\mathbf{y}_0)] &= -e_3(\mathbf{y}_0)e_1(\mathbf{y}_0)^2 \end{aligned} \tag{29}$$

gelten. — (28) *mit* (29) *erfüllen* (19) *für jedes* $\alpha_1 \neq 0, \alpha_2, \alpha_3$ *und für jedes* $\mathbf{x} \in X_- \cup X_+$ *und auch*

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, 1, 0, 0) = \mathbf{x}.$$

Ist die Klassenzahl $v = 2, 1$, *so sind die letzten bzw. die beiden letzten Zeilen in* (28) *und* (29), *sowie* $a_{\pm 3}, y_3$ *bzw.* $a_{\pm 2}, a_{\pm 3}, y_2, y_3$ *in* (27) *wegzulassen. Ist die Komponentenzahl* $u \leqq v$, *so sind die bezüglichen Zeilen von oben wegzulassen und es wird*

für $u = v : e_1, e_2, e_3$ *konstant und zwar entweder* $e_1 = 1, e_2$ *beliebig,* $e_3 = 0$ *oder* $e_1 = -1,\ e_2 = 0,\ e_3 = 0,$

für $u < v : e_2 = e_3 = 0.$

Unter den obigen Bedingungen sind also die allgemeinen Transformationsformeln der eindimensionalen differentiellen geometrischen Objekte erster, zweiter und dritter Klasse ($v = 1, 2, 3$) *mit beliebiger Komponentenzahl* u *durch die folgende Tabelle gegeben:*

v	u	Transformationsformeln für $\alpha_1 > 0$	Transformationsformeln für $\alpha_1 < 0$	e-Formeln
1	1	$y = h[g(x)\alpha_1]$	$\begin{cases} y = h[g(x)\alpha_1] \\ y = -h[g(x)\lvert\alpha_1\rvert] \end{cases}$	—
	$\geqq 2$	$\mathbf{y} = \mathbf{h}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{g}_0(\mathbf{x}) \\ g_1(\mathbf{x})\alpha_1 \end{pmatrix}\right]$	$\mathbf{y} = \mathbf{h}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{e}_0[\mathbf{g}_0(\mathbf{x})] \\ e_1[\mathbf{g}_0(\mathbf{x})]g_1(\mathbf{x})\lvert\alpha_1\rvert \end{pmatrix}\right]$	$\mathbf{e}_0[\mathbf{e}_0(\mathbf{y}_0)] = \mathbf{y}_0$ $e_1[\mathbf{e}_0(\mathbf{y}_0)] = e_1(\mathbf{y}_0)^{-1}$
2	1	$y = h\left[\frac{g(x)}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1^2}\right]$		—
	2	$\mathbf{y} = \mathbf{h}\left[\begin{pmatrix} g_1(\mathbf{x})\alpha_1 \\ \frac{g_2(\mathbf{x})}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1^2} \end{pmatrix}\right]$	$\begin{cases} \mathbf{y} = \mathbf{h}\left[\begin{pmatrix} g_1(\mathbf{x})\alpha_1 \\ \frac{g_2(\mathbf{x})}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1^2} \end{pmatrix}\right] \\ \mathbf{y} = \mathbf{h}\left[\begin{pmatrix} g_1(\mathbf{x})\lvert\alpha_1\rvert \\ \frac{e_2}{g_1(\mathbf{x})\lvert\alpha_1\rvert} + \frac{g_2(\mathbf{x})}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1^2} \end{pmatrix}\right] \end{cases}$	—
	$\geqq 3$	$\mathbf{y} = \mathbf{h}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{g}_0(\mathbf{x}) \\ g_1(\mathbf{x})\alpha_1 \\ \frac{g_2(\mathbf{x})}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1^2} \end{pmatrix}\right]$	$\mathbf{y} = \mathbf{h}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{e}_0[\mathbf{g}_0(\mathbf{x})] \\ e_1[\mathbf{g}_0(\mathbf{x})]g_1(\mathbf{x})\lvert\alpha_1\rvert \\ \frac{e_2[\mathbf{g}_0(\mathbf{x})]}{g_1(\mathbf{x})\lvert\alpha_1\rvert} + \frac{g_2(\mathbf{x})}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1^2} \end{pmatrix}\right]$	$\mathbf{e}_0[\mathbf{e}_0(\mathbf{y}_0)] = \mathbf{y}_0$ $e_1[\mathbf{e}_0(\mathbf{y}_0)] = e_1(\mathbf{y}_0)^{-1}$ $e_2[\mathbf{e}_0(\mathbf{y}_0)] = e_2(\mathbf{y}_0)e_1(\mathbf{y}_0)$

v	u	Transformationsformeln für $\alpha_1 > 0$	Transformationsformeln für $\alpha_1 < 0$	e-Formeln
3	1	$y = h\left[\frac{g(x)}{\alpha_1^2} + \frac{\alpha_3}{\alpha_1^3} - \frac{3}{2}\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4}\right]$ (für $\alpha_1 > 0$ und $\alpha_1 < 0$)		—
	2	$\mathbf{y} = \mathbf{h}\left[\begin{pmatrix} \frac{g_2(\mathbf{x})}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1^2} \\ \frac{g_3(\mathbf{x})}{\alpha_1^2} + \frac{\alpha_3}{\alpha_1^3} - \frac{3}{2}\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4} \end{pmatrix}\right]$ (für $\alpha_1 > 0$ und $\alpha_1 < 0$)		—
		$\mathbf{y} = \mathbf{h}\left[\begin{pmatrix} \frac{g_2(\mathbf{x})}{\alpha_1} \\ \frac{g_3(\mathbf{x})}{\alpha_1^2} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1^3}\, g_2(\mathbf{x}) + \frac{\alpha_3}{\alpha_1^3} - \frac{3}{2}\frac{\alpha_2^2}{\alpha^4} \end{pmatrix}\right]$ (s. Nachtrag) (für $\alpha_1 > 0$ und $\alpha_1 < 0$)		—
		$\mathbf{y} = \mathbf{h}\left[\begin{pmatrix} \frac{g_2(\mathbf{x})}{\alpha_1} \\ \frac{g_3(\mathbf{x})}{\alpha_1^2} + \frac{\alpha_3}{\alpha_1^3} - \frac{3}{2}\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4} \end{pmatrix}\right]$	$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{y} = \mathbf{h}\left[\begin{pmatrix} \frac{g_2(\mathbf{x})}{\alpha_1} \\ \frac{g_3(\mathbf{x})}{\alpha_1^2} + \frac{\alpha_3}{\alpha_1^3} - \frac{3}{2}\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4} \end{pmatrix}\right] \\ \mathbf{y} = \mathbf{h}\left[\begin{pmatrix} \frac{g_2(\mathbf{x})}{\lvert\alpha_1\rvert} \\ \frac{g_3(\mathbf{x})}{\alpha_1^2} + \frac{\alpha_3}{\alpha_1^3} - \frac{3}{2}\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4} \end{pmatrix}\right] \end{array}\right.$ (s. Nachtrag)	—

v	u	Transformationsformeln für $\alpha_1 > 0$	Transformationsformeln für $\alpha_1 < 0$	e-Formeln
3	3	$\mathbf{y} = \mathbf{h}\left[\begin{pmatrix} g_1(\mathbf{x})\,\alpha_1 \\ \dfrac{g_2(\mathbf{x})}{\alpha_1} + \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1^2} \\ \dfrac{g_3(\mathbf{x})}{\alpha_1^2} + \dfrac{\alpha_3}{\alpha_1^3} - \dfrac{3}{2}\dfrac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4} \end{pmatrix}\right]$	$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{y} = \mathbf{h}\left[\begin{pmatrix} g_1(\mathbf{x})\,\alpha_1 \\ \dfrac{g_2(\mathbf{x})}{\alpha_1} + \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1^2} \\ \dfrac{g_3(\mathbf{x})}{\alpha_1^2} + \dfrac{\alpha_3}{\alpha_1^3} - \dfrac{3}{2}\dfrac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4} \end{pmatrix}\right] \\ \mathbf{y} = \mathbf{h}\left[\begin{pmatrix} g_1(\mathbf{x})\,\lvert\alpha_1\rvert \\ \dfrac{e_2}{g_1(\mathbf{x})\,\lvert\alpha_1\rvert} + \dfrac{g_2(\mathbf{x})}{\alpha_1} + \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1^2} \\ \dfrac{g_3(\mathbf{x})}{\alpha_1^2} + \dfrac{\alpha_3}{\alpha_1^3} - \dfrac{3}{2}\dfrac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4} \end{pmatrix}\right] \end{array}\right.$	—
	$\geqq 4$	$\mathbf{y} = \mathbf{h}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{g}_0(\mathbf{x}) \\ g_1(\mathbf{x})\,\alpha_1 \\ \dfrac{g_2(\mathbf{x})}{\alpha_1} + \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1^2} \\ \dfrac{g_3(\mathbf{x})}{\alpha_1^2} + \dfrac{\alpha_3}{\alpha_1^3} - \dfrac{3}{2}\dfrac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4} \end{pmatrix}\right]$	$\mathbf{y} = \mathbf{h}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{e}_0[\mathbf{g}_0(\mathbf{x})] \\ e_1[\mathbf{g}_0(\mathbf{x})]\,g_1(\mathbf{x})\,\lvert\alpha_1\rvert \\ \dfrac{e_2[\mathbf{g}_0(\mathbf{x})]}{g_1(\mathbf{x})\,\lvert\alpha_1\rvert} + \dfrac{g_2(\mathbf{x})}{\alpha_1} + \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1^2} \\ \dfrac{e_3[\mathbf{g}_0(\mathbf{x})]}{g_1(\mathbf{x})^2\,\alpha_1^2} + \dfrac{g_3(\mathbf{x})}{\alpha_1^2} + \dfrac{\alpha_3}{\alpha_1^3} - \dfrac{3}{2}\dfrac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4} \end{pmatrix}\right]$	$e_0[\mathbf{e}_0(\mathbf{y}_0)] = \mathbf{y}_0$ $e_1[\mathbf{e}_0(\mathbf{y}_0)] = e_1(\mathbf{y}_0)^{-1}$ $e_2[\mathbf{e}_0(\mathbf{y}_0)] = e_2(\mathbf{y}_0)\,e_1(\mathbf{y}_0)$ $e_3[\mathbf{e}_0(\mathbf{y}_0)] = -e_3(\mathbf{y}_0)\,e_1(\mathbf{y}_0)$

[Die Teilung $X_- \cup X_+$ $(X_+ \cap X_- = u)$ ähnelt der Teilung $\alpha_1 \gtrless 0$ der $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$.]

Beweis. Aus dem Satz 3, der auch die Sätze 1, 2 enthält, folgt für $\alpha_1 > 0$ bei $\mathbf{x} \in X_+$ das Bestehen von (20) mit $g_1(x) > 0$. Da (20) bei dem Ersetzen von

$$\begin{pmatrix} \mathbf{g}_0(\mathbf{x}) \\ g_1(\mathbf{x}) \\ g_2(\mathbf{x}) \\ g_3(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{h}\begin{pmatrix} \mathbf{y}_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

durch

$$\begin{pmatrix} \mathbf{g}_0(\mathbf{x}) \\ -g_1(\mathbf{x}) \\ g_2(\mathbf{x}) \\ g_3(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{h}\begin{pmatrix} \mathbf{y}_0 \\ -y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

gültig bleibt, kann $g_1(\mathbf{x}) \gtrless 0$ für $\mathbf{x} \in X_\pm$ genommen werden. So haben die zu den beiden Fällen gehörenden zwei Funktionen $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ verschiedene Definitionsbereiche (X_+, X_-) und Wertevorräte $(y_1 > 0, y_1 < 0)$, und deshalb führt es zu keinem Mißverständnis, wenn beide mit demselben Funktionenzeichen $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ bezeichnet werden. So gilt

$$\text{(20)} \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \mathbf{h}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{g}_0(\mathbf{x}) \\ g_1(\mathbf{x})\alpha_1 \\ \dfrac{g_2(\mathbf{x})}{\alpha_1} + \dfrac{\alpha_1}{\alpha_1^2} \\ \dfrac{g_3(\mathbf{x})}{\alpha_1^2} + \dfrac{\alpha_3}{\alpha_1^3} - \dfrac{3}{2}\dfrac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4} \end{pmatrix}\right] \quad \text{für} \quad \alpha_1 > 0, \quad \mathbf{x} \in X_+ \cup X_-,$$

insbesondere

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, 1, 0, 0) = \mathbf{x}.$$

Für $\alpha_1 < 0$ folgt aus (19)

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \mathbf{f}[\mathbf{f}(\mathbf{x}, -1, 0, 0), -\alpha_1, \alpha_2, -\alpha_3] =$$
$$= \mathbf{f}[\mathbf{f}(\mathbf{x}, -\alpha_1, -\alpha_2, -\alpha_3), -1, 0, 0],$$

oder mit (20) und mit $\mathbf{g}(\mathbf{f}[\mathbf{h}(\mathbf{y}), -1, 0, 0]) = \mathbf{d}(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} \mathbf{d}_0(\mathbf{y}) \\ d_1(\mathbf{y}) \\ d_2(\mathbf{y}) \\ d_3(\mathbf{y}) \end{pmatrix}$:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= \mathbf{h}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{d}_0[\mathbf{g}(\mathbf{x})] \\ -d_1[\mathbf{g}(\mathbf{x})]\alpha_1 \\ -\dfrac{d_2[\mathbf{g}(\mathbf{x})]}{\alpha_1} + \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1^2} \\ \dfrac{d_3[\mathbf{g}(\mathbf{x})]}{\alpha_1^2} + \dfrac{\alpha_3}{\alpha_1^3} - \dfrac{3}{2}\dfrac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4} \end{pmatrix}\right] = \\
&= \mathbf{h}\left(\mathbf{d}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{g}_0(\mathbf{x}) \\ -g_1(\mathbf{x})\alpha_1 \\ -\dfrac{g_2(\mathbf{x})}{\alpha_1} - \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1^2} \\ \dfrac{g_3(\mathbf{x})}{\alpha_1^2} + \dfrac{\alpha_3}{\alpha_1^3} - \dfrac{3}{2}\dfrac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4} \end{pmatrix}\right]\right),
\end{aligned}
\tag{30}
$$

und hieraus mit $\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$:

$$
\mathbf{d}(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ -\dfrac{1}{\alpha_1} \\ -\alpha_1 \\ \alpha_1^2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{d}\begin{pmatrix} \mathbf{y}_0 \\ -y_1\alpha_1 \\ -\dfrac{y_2}{\alpha_1} - \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1^2} \\ \dfrac{y_3}{\alpha_1^2} + \dfrac{\alpha_3}{\alpha_1^3} - \dfrac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1} \\ -\dfrac{\alpha_3}{\alpha_1} + \dfrac{3}{2}\dfrac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2} \end{pmatrix}.
$$

Nehmen wir z. B. für $\mathbf{x} \in X_+$, $y_1 > 0$ (der andere Fall läßt sich analog erledigen)

$$
\alpha_1 = -\frac{1}{y_1}, \quad \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = -y_2, \quad \frac{\alpha_3}{\alpha_1} - \frac{3}{2}\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2} = -y_3
$$

und bezeichnen

$$
\mathbf{d}\begin{pmatrix} \mathbf{y}_0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{e}(\mathbf{y}_0) = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_0(\mathbf{y}_0) \\ e_1(\mathbf{y}_0) \\ e_2(\mathbf{y}_0) \\ e_3(\mathbf{y}_0) \end{pmatrix},
$$

so wird

$$
\mathbf{d}(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ y_1 \\ y_1^{-1} \\ y_1^{-2} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{e}(\mathbf{y}_0) + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ -y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.
$$

Setzen wir dies in (30) ein, so erhalten wir (28); setzen wir dagegen (28) z. B. in

$$\mathbf{f}[\mathbf{f}(\mathbf{x}, -1, 0, 0), -1, 0, 0] = \mathbf{f}(\mathbf{x}, 1, 0, 0) = \mathbf{x}$$

ein (vgl. (19)), so ist (29) unmittelbar einsehbar. — Auch die Spezialfälle $v < 3$ und $u \leqq v$ können mittels der bezüglichen Spezialisierung des Beweises sofort erledigt werden.

Substituieren wir (28) in (19) und nehmen (29) in Betracht, so sehen wir, daß (19) tatsächlich erfüllt wird. Damit ist der Beweis vollendet.

Jedenfalls gelangten wir unter diesen Bedingungen bei $\alpha_1 < 0$ zu wesentlich mehr verwickelten Formeln, als bei den Bedingungen der Sätze 1, 2, 3, während bei $\alpha_1 > 0$ die Formeln dieselben blieben.

(Eingegangen am 8. Juni 1956.)

Nachtrag

Wir vergleichen in diesem Nachtrag die Resultate des § 4 der vorstehenden Arbeit mit den Ergebnissen anderer Verfasser über denselben Gegenstand.

O. E. GHEORGHIU hat sich in [6] mit (differentiellen geometrischen) Objekten erster Klasse von zwei Komponenten im eindimensionalen Raum beschäftigt und findet (entgegen seiner Behauptung wegen Rechnungsfehler nicht alle derivierbare, sondern nur) alle jene Objekte, die von der Gestalt

$$y_0 = x_0 + k(x_1 - \lambda x_0, \alpha_1), \quad y_1 = x_1 + \lambda k(x_1 - \lambda x_0, \alpha_1)$$

sind. Er beweist, daß diese Transformationsformeln

$$y_0 = x_0 + l(x_1 - \lambda x_0) \log |\alpha_1|, \quad y_1 = x_1 + \lambda l(x_1 - \lambda x_0) \log |\alpha_1|$$

sind.

Nimmt man

$$z_0 = g_0\left[\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}\right] = x_1 - \lambda x_0, \quad w_0 = g_0\left[\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}\right] = y_1 - \lambda y_0,$$

$$z_1 = g_1\left[\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}\right] = e^{\frac{x_1}{l(x_1 - \lambda x_0)}}, \quad w_1 = g_1\left[\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}\right] = e^{\frac{y_1}{l(y_1 - \lambda y_0)}},$$

so sieht man, daß diese Objekte sich mit

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}\left[\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} x_1 - \lambda x_0 \\ e^{\frac{x_1}{l(x_1 - \lambda x_0)}} \end{pmatrix}$$

in

$$w_0 = z_0, \quad w_1 = z_1|\alpha_1|, \qquad \mathbf{y} = \mathbf{h}\left[\begin{pmatrix} g_0(\mathbf{x}) \\ g_1(\mathbf{x})|\alpha_1| \end{pmatrix}\right] \qquad (\mathbf{g}[\mathbf{h}(\mathbf{z})] = \mathbf{z})$$

einreihen lassen, was der Spezialfall

$$e_0(y_0) = y_0, \quad e_1(y_0) = 1$$

der zweiten Zeile unserer Tabelle ist.

In [5] findet O. E. GHEORGHIU sämtliche Objekte erster Klasse von zwei Komponenten im eindimensionalen Raum, deren Transformationsformeln Spezialfälle von

$$y_0 = x_0 + k_0(\alpha_1), \quad y_1 = x_1 + \frac{k_1(\alpha_1)}{k_0(\alpha_1)}(e^{k_0(\alpha_1)} - 1)e^{x_1}$$

sind und findet, daß diese von der Gestalt

$$y_0 = x_0 + \lambda \log|\alpha_1|, \quad y_1 = x_1 + \varkappa(|\alpha_1|^\lambda - 1)e^{x_1}$$

sein müssen.

Auch dies geht durch

$$z_0 = g_0\left[\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}\right] = x_1 - \varkappa e^{x_0}, \qquad w_0 = g_0\left[\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}\right] = y_1 - \varkappa e^{y_0},$$

$$z_1 = g_1\left[\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}\right] = e^{\frac{x_0}{\lambda}}, \qquad w_1 = g_1\left[\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}\right] = e^{\frac{y_0}{\lambda}},$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}\left[\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} x_1 - \varkappa e^{x_0} \\ e^{\frac{x_0}{\lambda}} \end{pmatrix}$$

in

$$w_0 = z_0, \quad w_1 = z_1|\alpha_1|, \qquad \mathbf{y} = \mathbf{h}\left[\begin{pmatrix} g_0(\mathbf{x}) \\ g_1(\mathbf{x})|\alpha_1| \end{pmatrix}\right]$$

über.

In [4] untersucht derselbe Verfasser Objekte zweiter Klasse von zwei Komponenten und findet (entgegen seiner Behauptung wieder nicht alle derivierbare, sondern nur) alle jene Objekte, die von der Gestalt

$$y_1 = \frac{x_1}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1^2} k(x_1 - x_2) + l(x_1 - x_2) m(\alpha_1),$$

$$y_2 = \frac{x_2}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1^2} k(x_1 - x_2) + l(x_1 - x_2) m(\alpha_1)$$

sind, indem er beweist, daß ihre Transformationsformeln nur von der Gestalt

$$y_1 = \frac{x_1}{\alpha_1} + \varkappa \frac{\alpha_2}{\alpha_1^2} + \lambda\left(1 - \frac{1}{\alpha_1}\right), \quad y_2 = \frac{x_2}{\alpha_1} + \varkappa \frac{\alpha_2}{\alpha_1^2} + \lambda\left(1 - \frac{1}{\alpha_1}\right)$$

sein können, über welche er selbst bemerkt, daß sie mit

$$y_1 = \frac{x_1}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1^2}, \quad y_2 = \frac{x_2}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1^2}$$

äquivalent sind.

Diese letzteren gehen durch

$$z_1 = g_1\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{x_2 - x_1}, \quad w_1 = g_1\left[\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{y_2 - y_1},$$

$$z_2 = g_2\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right] = x_2, \qquad w_2 = g_2\left[\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right] = y_2,$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{x_2 - x_1} \\ x_2 \end{pmatrix}$$

in

$$w_1 = z_1\alpha_1, \qquad w_2 = \frac{z_2}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1^2}, \qquad \mathbf{y} = \mathbf{h}\left[\begin{pmatrix} g_1(\mathbf{x})\alpha_1 \\ \dfrac{g_2(\mathbf{x})}{\alpha_1} + \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1^2} \end{pmatrix}\right],$$

d. h. in die erste Formel der vierten Zeile unserer Tabelle über. (Die obige Bestimmung der Funktionen $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ erfolgte eben mit den im Beweis der Sätze 1, 2 gegebenen Methoden.)

JU. E. PENSOW hat in [9] unter Analytizitätsbedingungen u. a. die Objekte von zwei Komponenten im eindimensionalen Raum untersucht, und fand als Objekte erster, zweiter und dritter Klasse die Objekte der Sätze 1, 2, 3 (nicht aber die des Satzes 4) unserer Arbeit für den Fall $n = 2$, und außerdem die mit

$$y_2 = \frac{x_2}{\alpha_1}, \quad y_3 = \frac{x_3}{\alpha_1^2} + x_2\frac{\alpha_2}{\alpha_1^3} - \frac{3}{2}\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4} + \frac{\alpha_3}{\alpha_1^3} \tag{31}$$

äquivalenten Objekte dritter Klasse.

Diese Objekte lassen sich in die bisherigen Ergebnisse unserer Arbeit nicht einreihen, da die in den Sätzen 3, 4 geforderte eindeutige Lösbarkeit von

$$\mathbf{f}\left[\begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, 1, y_2, y_3\right] = \mathbf{x} \tag{32}$$

bezüglich $\begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ für

$$x_2 = a_2, \quad x_3 = a_3 + a_2 y_2 - \frac{3}{2}y_2^2 + y_3$$

offenbar nicht erfüllt ist.

Es ist aber auch eine gewisse Willkür in der Bedingung (32), mehr als in den übrigen Bedingungen unserer Arbeit. Da die Zahl der Parameter

größer ist als die der Komponenten, muß nämlich ein Parameter festgehalten werden. Dies muß aber nicht $\alpha_1 = 1$ sein, es kann auch $\alpha_2 = 0$ genommen werden, da nicht nur die Elemente $\{1, \alpha_2, \alpha_3\}$, sondern auch die $\{\alpha_1, 0, \alpha_3\}$ eine zweiparametrige Untergruppe der Gruppe mit der „Multiplikation"

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}\{\beta_1, \beta_2, \beta_2\} = \{\beta_1\alpha_1, \beta_2\alpha_1^2 + \beta_1\alpha_2, \beta_3\alpha_1^3 + \beta_1\alpha_3 + 3\beta_2\alpha_1\alpha_2\}$$

der Elemente $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ $(\alpha_1 \neq 0)$ bilden. Wird tatsächlich die Bedingung (32) durch die Forderung der eindeutigen Lösbarkeit von

$$\mathbf{f}\left[\begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, y_2, 0, y_3\right] = \mathbf{x}$$

bezüglich $\begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ ersetzt, so erhalten wir außer den Objekten (20) bzw. (28) (für $n = 2$) auch die mit den Pensowschen Objekten (31) äquivalenten Objekte.

Wir beweisen nämlich den folgenden

SATZ 5. *Genügt* $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ $\left(\alpha_1 \neq 0, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in X\right)$ *der Funktionalgleichung*

(19) $$\mathbf{f}[\mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \beta_1, \beta_2, \beta_3] = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \beta_1\alpha_1, \beta_2\alpha_1^2 + \beta_1\alpha_2, \beta_3\alpha_1^3 + \beta_1\alpha_3 + 3\beta_2\alpha_2\alpha_1)$$

und ist

$$\mathbf{f}\left[\begin{pmatrix} a_{\pm 2} \\ a_{\pm 3} \end{pmatrix}, y_2, 0, y_3\right] = \mathbf{x}$$

bezüglich $\begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$ *eindeutig lösbar (ob* 1) *bei* $\mathbf{x} \in X$, $a_{-2} = a_2$, $a_{-3} = a_3$ *für beliebiges* $y_2 \neq 0$, *oder* 2) *bei* $\mathbf{x} \in X_\pm$, $X_- \cup X_+ = X$, $X_- \cap X_+ = 0$ *für die* $y_2 > 0$), *ist ferner*

$$\mathbf{g}\left\{\mathbf{f}\left[\begin{pmatrix} a_{\pm 2} \\ a_{\pm 3} \end{pmatrix}, 1, \alpha_2, 0\right]\right\}$$

in $\alpha_2 = 0$ *bezüglich* α_2 *derivierbar, so gilt entweder*

(33) $$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \mathbf{h}\left[\begin{pmatrix} \dfrac{g_2(\mathbf{x})}{\alpha_1} + c_2\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1^2} \\ \dfrac{g_3(\mathbf{x})}{\alpha_1} + c_3\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1^3}g_2(\mathbf{x}) + \dfrac{c_2c_3 - 3}{2}\dfrac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4} + \dfrac{\alpha_3}{\alpha_1^3} \end{pmatrix}\right]$$

($\mathbf{g}[\mathbf{h}(\mathbf{y})] = \mathbf{y}$; c_2, c_3 *beliebige Konstanten) oder* [2)]

(34) $$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \mathbf{h}\left[\begin{pmatrix} \dfrac{g_2(\mathbf{x})}{|\alpha_1|} \\ \dfrac{g_3(\mathbf{x})}{\alpha_1} + \dfrac{\alpha_3}{\alpha_1^3} - \dfrac{3}{2}\dfrac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4} \end{pmatrix}\right] \qquad (\mathbf{g}[\mathbf{h}(\mathbf{y})] = \mathbf{y}),$$

womit für alle erlaubten $\mathbf{x}, \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ (19), *sowie* $\mathbf{f}(\mathbf{x}, 1, 0, 0) = \mathbf{x}$ *erfüllt ist.*

Diese eindimensionalen differentiellen geometrischen Objekte dritter Klasse von zwei Komponenten sind mit einer der durch die folgenden Transformationsformeln bestimmten vier Objekte äquivalent:

$$(35)\qquad y_2 = \frac{x_2}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1^2}, \qquad y_3 = \frac{x_3}{\alpha_1^2} - \frac{3}{2}\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4} + \frac{\alpha_3}{\alpha_1^3},$$

$$(31)\qquad y_2 = \frac{x_2}{\alpha_1}, \qquad y_3 = \frac{x_3}{\alpha_1^2} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1^3}x_2 - \frac{3}{2}\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4} + \frac{\alpha_3}{\alpha_1^3},$$

$$(36)\qquad y_2 = \frac{x_2}{\alpha_1}, \qquad y_3 = \frac{x_3}{\alpha_1^2} - \frac{3}{2}\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4} + \frac{\alpha_3}{\alpha_1^3},$$

$$(37)\qquad y_2 = \frac{x_2}{|\alpha_1|}, \qquad y_3 = \frac{x_3}{\alpha_1^2} - \frac{3}{2}\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4} + \frac{\alpha_3}{\alpha_1^3}.$$

Wir haben auch die mit (31), (36), (37) äquivalenten Objekte in unsere Tabelle schon eingetragen.

Beweis. 1. Man setze in (19) $\alpha_2 = \beta_2 = 0$, so wird

$$\mathbf{f}[\mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha_1, 0, \alpha_3), \beta_1, 0, \beta_3] = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \beta_1\alpha_1, 0, \beta_3\alpha_1^3 + \beta_1\alpha_3).$$

Da dies eine Gleichung von der Gestalt (1) ist, wird laut des Hilfssatzes, falls unsere Voraussetzung erfüllt ist,

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha_1, 0, \alpha_3) = \mathbf{h}\left[\begin{pmatrix} g_2(\mathbf{x})\alpha_1 \\ g_3(\mathbf{x})\alpha_1 + g_2(\mathbf{x})^3\alpha_3 \end{pmatrix}\right], \quad \mathbf{h}[g(x)] = x$$

(insbesondere $\mathbf{f}(\mathbf{x}, 1, 0, 0) = \mathbf{x}$) oder mit

$$\bar{\mathbf{h}}\left[\begin{pmatrix} \dfrac{1}{y_2} \\ \dfrac{y_3}{y_2^3} \end{pmatrix}\right] = \mathbf{h}\left[\begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right], \qquad \bar{g}_2(\mathbf{x}) = \frac{1}{g_2(\mathbf{x})}, \quad \bar{g}_3(\mathbf{x}) = \frac{g_3(\mathbf{x})}{g_2(\mathbf{x})^3}:$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha_1, 0, \alpha_3) = \bar{\mathbf{h}}\left[\begin{pmatrix} \dfrac{\bar{g}_2(\mathbf{x})}{\alpha_1} \\ \dfrac{\bar{g}_3(\mathbf{x})}{\alpha_1^2} + \dfrac{\alpha_3}{\alpha_1^3} \end{pmatrix}\right].$$

Wird andererseits diese Formel (die Oberstriche weggelassen) in (19) mit $\alpha_2 = \beta_3 = 0, \beta_1 = 1$ eingesetzt, so erhalten wir

$$\mathbf{f}\left\{\mathbf{h}\left[\begin{pmatrix} \dfrac{g_2(\mathbf{x})}{\alpha_1} \\ \dfrac{g_3(\mathbf{x})}{\alpha_1^2} + \dfrac{\alpha_3}{\alpha_1^3} \end{pmatrix}\right], 1, \beta_2, 0\right\} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha_1, \beta_2\alpha_1^2, \alpha_3)$$

oder mit $\beta_2 \alpha_1^2 = \alpha_2$, $\mathbf{f}(y, \alpha_2) = \mathbf{g}\{\mathbf{f}[\mathbf{h}(\mathbf{y}), 1, \alpha_2, 0]\}$:

$$\text{(38)} \qquad \mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha_1, \bar{\alpha}_2, \alpha_3) = \mathbf{h}\left\{\bar{\mathbf{f}}\left[\begin{pmatrix} \dfrac{g_2(\mathbf{x})}{\alpha_1} \\ \dfrac{g_3(\mathbf{x})}{\alpha_1^2} + \dfrac{\alpha_3}{\alpha_1^3} \end{pmatrix}, \frac{\bar{\alpha}_2}{\alpha_1^3}\right]\right\}.$$

Setzen wir jetzt dies in (19) mit

$g_2(\mathbf{x}) = y_2$, $g_3(\mathbf{x}) = y_3$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_3 = 0$, $\beta_2 = 0$, $\beta_1 = y_2$, $\beta_3 = -\beta_1 y_3 = -y_2 y_3$

ein, so wird mit den Bezeichnungen (6)

$$\begin{pmatrix} y_2^{-1} \\ y_2^{-2} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{f}\left[\begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \alpha_2\right] + \begin{pmatrix} 0 \\ -\dfrac{y_3}{y_2^2} \end{pmatrix} = \bar{\mathbf{f}}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{\alpha_2}{y_2}\right]$$

oder mit

$$\mathbf{C}(\alpha_2) = \mathbf{f}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2\right] = \mathbf{g}\left(\mathbf{f}\left\{\mathbf{h}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right], 1, \alpha_2, 0\right\}\right) = \mathbf{g}\left\{\mathbf{f}\left[\begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, 1, \alpha_2, 0\right]\right\}$$

einerseits

$$\mathbf{C}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

andererseits

$$\bar{\mathbf{f}}\left[\begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \alpha_2\right] = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_2^2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{C}\left(\frac{\alpha_2}{y_2}\right) + \begin{pmatrix} 0 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

(38) geht hiermit in

$$\text{(39)} \qquad \mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \mathbf{h}\left[\begin{pmatrix} \dfrac{g_2(\mathbf{x})}{\alpha_1} C_2\left(\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1 g_2(\mathbf{x})}\right) \\ \dfrac{g_2(\mathbf{x})^2}{\alpha_1^2} C_3\left(\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1 g_2(\mathbf{x})}\right) + \dfrac{g_3(\mathbf{x})}{\alpha_1^2} + \dfrac{\alpha_3}{\alpha_1^3} \end{pmatrix}\right]$$

über, was wir in (19) zurücksubstituieren, um nach den möglichen Verkürzungen

$$C_2(\xi)\, C_2\left(\frac{\eta}{C_2(\xi)}\right) = C_2(\xi + \eta) \qquad (C_2(0) = 1),$$

$$C_2(\xi)^2\, C_3\left(\frac{\eta}{C_2(\xi)}\right) + C_3(\xi) = C_3(\xi + \eta) + 3\xi\eta \qquad (C_3(0) = 0)$$

zu erhalten, wo

$$\xi = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 g_2(\mathbf{x})}, \qquad \eta = \frac{\beta_2 \alpha_1}{\beta_1 g_2(\mathbf{x})}$$

bezeichnet wurde.

Ohne Voraussetzungen über $\mathbf{C}(\xi)$ würden wir zu kein vernünftiges Ergebnis gelangen, da unser Gleichungssystem z. B. durch

$$C_2(\xi)=1, \quad C_3(\xi)=-\frac{3}{2}\xi^2+\lambda(\xi)$$

erfüllt ist, wo $\lambda(\xi)$ eine beliebige (also möglicherweise völlig unstetige) Lösung von

$$\lambda(\xi+\eta)=\lambda(\xi)+\lambda(\eta)$$

bedeutet, d. h. wir erhielten mit

$$y_2=\frac{x_2}{\alpha_1}, \quad y_3=\frac{x_2^2}{\alpha_1^2}\lambda\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1 x_2}\right)+\frac{x_3}{\alpha_1^2}-\frac{3}{2}\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4}+\frac{\alpha_3}{\alpha_1^3}$$

äquivalente Objekte mit unstetigen Transformationsformeln.

Da aber laut unserer Voraussetzungen $\mathbf{C}(\alpha_2)$ bei $\alpha_2=0$ derivierbar ist, können wir unser Gleichungssystem folgenderweise lösen:

$$\frac{C_2(\xi+\eta)-C_2(\xi)}{\eta}=\frac{C_2\left(\frac{\eta}{C_2(\xi)}\right)-C_2(0)}{\frac{\eta}{C_2(\xi)}},$$

und da die rechte Seite bei $\eta\to 0$ einen Grenzwert $C_2'(0)$ besitzt, gilt dasselbe auch für die linke:

$$C_2'(\xi)=C_2'(0)=c_2,$$

und

$$C_2(\xi)=c_2\xi+1$$

wegen

$$C_2(0)=1.$$

Weiter wird

$$(c_2\xi+1)^2 C_3\left(\frac{\eta}{c_2\xi+1}\right)+C_3(\xi)=C_3(\xi+\eta)+3\xi\eta,$$

d. h.

$$\frac{C_3(\xi+\eta)-C_3(\xi)}{\eta}=-3\xi+\frac{C_3\left(\frac{\eta}{c_2\xi+1}\right)-C_3(0)}{\frac{\eta}{c_2\xi+1}}(c_2\xi+1),$$

und wieder wegen der Konvergenz der rechten Seite bei $\eta\to 0$:

$$C_3'(\xi)=-3\xi+C_3'(0)(c_2\xi+1)=-3\xi+c_3(c_2\xi+1),$$

also integriert:

$$C_3(\xi)=\frac{c_2c_3-3}{2}\xi^2+c_3\xi$$

wegen

$$C_3(0)=0.$$

Wenn wir nun dies in (39) einsetzen, erhalten wir die Formel (33) die der Gleichung (19) genügt.

Bemerkung. Fordern wir statt der Derivierbarkeit z. B., daß $C_2(\xi)$ *höchstens eine Nullstelle habe*, so wird aus

$$C_2(\xi)\,C_2\left(\frac{\eta}{C_2(\xi)}\right)=C_2(\xi+\eta),$$

falls wir den Fall

$$C_2(\xi)=1$$

ausschließen, durch das Einsetzen von $\eta=\frac{\xi C_2(\xi)}{1-C_2(\xi)}$ $\left(\text{also } \xi+\eta=\frac{\eta}{C_2(\xi)}=\right.$ $\left.=\frac{\xi}{1-C_2(\xi)}\right)$:

$$C_2\left(\frac{\xi}{1-C_2(\xi)}\right)=0,\qquad \frac{\xi}{1-C_2(\xi)}=\text{konstant}=-\frac{1}{c_2},$$

und wieder

$$C_2(\xi)=c_2\xi+1,$$

wozu auch $C_2(\xi)=1$ gehört, falls $c_2=0$ ist.

Ist $c_2\neq 0$, so folgt aus

$$(c_2\xi+1)^2 C_3\left(\frac{\eta}{c_2\xi+1}\right)+C_3(\xi)=C_3(\xi+\eta)+3\xi\eta$$

mit $\eta=-\xi-\frac{1}{c_2}$ $\left(\text{also } \xi+\eta=\frac{\eta}{c_2\xi+1}=-\frac{1}{c_2}\right)$:

$$C_3(\xi)=-(c_2^2\xi^2+2c_2\xi)\,C_3\left(-\frac{1}{c_2}\right)-3\xi^2-3\frac{\xi}{c_2},$$

und mit $-\frac{3}{c_2}-2c_2C_3\left(-\frac{1}{c_2}\right)=c_3$ wieder:

$$C_3(\xi)=\frac{c_2c_3-3}{2}\xi^2+c_3\xi.$$

Hier wurde nichts über $C_3(\xi)$ vorausgesetzt. Ist aber $c_2=0$, so führt die so erhaltene Gleichung

$$C_3(\eta)+C_3(\xi)=C_3(\xi+\eta)+3\xi\eta$$

mit

$$C_3(\xi)+\frac{3}{2}\xi^2=\lambda(\xi)$$

auf

$$\lambda(\xi+\eta)=\lambda(\xi)+\lambda(\eta),$$

und die Lösung

$$\lambda(\xi)=c_3\xi, \quad C_3(\xi)=-\frac{3}{2}\xi^2+c_3\xi$$

kann nur dann erhalten werden, falls $C_3(\xi)$ als *stetig* (oder meßbar, auf einer Menge von positivem Maß beschränkt, usw.) vorausgesetzt wird.

2. Aus der Voraussetzung 2) folgt, wie bei dem Beweis des Satzes 4, daß für $\alpha_1>0, \mathbf{x}\in X_\pm$

$$\tag{33} \mathbf{f}(\mathbf{x},\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\mathbf{h}\left[\begin{pmatrix}\dfrac{g_2(\mathbf{x})}{\alpha_1}+c_2\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1^2}\\[2ex] \dfrac{g_3(\mathbf{x})}{\alpha_1^2}+c_3\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1^3}g_2(\mathbf{x})+\dfrac{c_2c_3-3}{2}\dfrac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4}+\dfrac{\alpha_3}{\alpha_1^3}\end{pmatrix}\right]$$

$(\mathbf{h}[\mathbf{g}(\mathbf{y})]=\mathbf{y}, g_2(\mathbf{x})\gtrless 0)$ gilt. Für $\alpha_1<0$ folgt aus (19) auch hier

$$\mathbf{f}(\mathbf{x},\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\mathbf{f}[\mathbf{f}(\mathbf{x},-1,0,0),-\alpha_1,\alpha_2,-\alpha_3]=$$
$$=\mathbf{f}[\mathbf{f}(\mathbf{x},-\alpha_1,-\alpha_2,-\alpha_3),-1,0,0]$$

oder mit (33) und mit $\mathbf{g}(\mathbf{f}[\mathbf{h}(\mathbf{y}),-1,0,0])=\mathbf{d}(\mathbf{y})=\begin{pmatrix}d_2(\mathbf{y})\\ d_3(\mathbf{y})\end{pmatrix}$:

$$\tag{40} \left\{\begin{aligned}\mathbf{f}(\mathbf{x},\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)&=h\left[\begin{pmatrix}-\dfrac{d_2[\mathbf{g}(\mathbf{x})]}{\alpha_1}+c_2\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1^2}\\[2ex] \dfrac{d_3[\mathbf{g}(\mathbf{x})]}{\alpha_1^2}-c_3\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1^3}d_2[\mathbf{g}(\mathbf{x})]+\dfrac{c_2c_3-3}{2}\dfrac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4}+\dfrac{\alpha_3}{\alpha_1^3}\end{pmatrix}\right]=\\ &=\mathbf{h}\left\{\mathbf{d}\left[\begin{pmatrix}-\dfrac{g_2(\mathbf{x})}{\alpha_1}-c_2\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1^2}\\[2ex] \dfrac{g_3(\mathbf{x})}{\alpha_1^2}+c_3\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1^3}g_2(\mathbf{x})+\dfrac{c_3c_3-3}{2}\dfrac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4}+\dfrac{\alpha_3}{\alpha_1^3}\end{pmatrix}\right]\right\}\end{aligned}\right.$$

und hieraus mit $\mathbf{y}=\mathbf{g}(\mathbf{x})$ ($y_2\gtrless 0$, je nachdem $\mathbf{x}\in X_\pm$):

$$d_2(\mathbf{y})=-\alpha_1 d_2\left[\begin{pmatrix}-\dfrac{y_2}{\alpha_1}-c_2\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1^2}\\[2ex] \dfrac{y_3}{\alpha_1^2}+c_3\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1^3}y_2+\dfrac{c_2c_3-3}{2}\dfrac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4}+\dfrac{\alpha_3}{\alpha_1^3}\end{pmatrix}\right]+c_2\frac{\alpha_2}{\alpha_1},$$

$$d_3(\mathbf{y})=\alpha_1^2 d_3\left[\begin{pmatrix}-\dfrac{y_2}{\alpha_1}+c_2\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1^2}\\[2ex] \dfrac{y_3}{\alpha_1^2}+c_3\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1^3}y_2+\dfrac{c_2c_3-3}{2}\dfrac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4}+\dfrac{\alpha_3}{\alpha_1^3}\end{pmatrix}\right]+$$
$$+c_3\frac{\alpha_2}{\alpha_1}d_2(\mathbf{y})-\frac{c_2c_3-3}{2}\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2}-\frac{\alpha_3}{\alpha_1^3}.$$

Wir nehmen z. B. für $\mathbf{x} \in X_-$, $y_2 < 0$ (der andere Fall läßt sich ebenso erledigen):

$$\alpha_1 = y_2, \quad \alpha_2 = 0, \quad \frac{\alpha_3}{\alpha_1} = -y_3$$

und bezeichnen $\mathbf{d}\left[\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$:

$$d_2(\mathbf{y}) = -y_2 e_2, \quad d_3(\mathbf{y}) = y_3 + y_2^2 e_3.$$

Aus (33) ($\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$) folgt

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, 1, 0, 0) = \mathbf{x},$$

aus (19) ($\alpha_1 = \beta_1 = -1$, $\alpha_2 = \beta_2 = \alpha_3 = \beta_3 = 0$) dagegen

$$\mathbf{f}[\mathbf{f}(\mathbf{x}, -1, 0, 0), -1, 0, 0] = \mathbf{f}(\mathbf{x}, 1, 0, 0) = \mathbf{x},$$

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \mathbf{y} = \mathbf{d}[\mathbf{d}(\mathbf{y})] = \begin{pmatrix} y_2 e_2^2 \\ y_3 + y_2^2 e_3 + y_2^2 e_2^2 e_3 \end{pmatrix},$$

so daß

$$e_2^2 = 1, \quad e_3 = 0$$

sein muß. Setzen wir

$$\mathbf{d}(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} -e_2 y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \pm 1$$

in (40) zurück, so erhalten wir

$$c_2(1 - e_2) = 0, \quad c_3(1 - e_2) = 0.$$

Ist also nicht $c_2 = c_3 = 0$, so muß

$$e_2 = 1$$

sein. Für $c_2 = c_3 = 0$ sind

$$e_2 = 1 \quad \text{und} \quad e_2 = -1$$

beide möglich. Dies ergibt eben die Formeln (33) und (34) für $\alpha_1 < 0$ (für $\alpha_1 > 0$ fällt (34) in (33)), die die Gleichung (19) auch tatsächlich erfüllen.

Die Objekte (34) sind offenbar mit den Objekten äquivalent, die durch (37) transformiert werden. Ist

$$c_2 = c_3 = 0, \quad e_2 = 1,$$

so ist (33) mit den Objekten, die durch (36) transformiert werden, äquivalent. Für

$$c_2 = 0, \quad c_3 \neq 0, \quad (e_2 = 1)$$

führen wir

$$\bar{\mathbf{h}}\left[\begin{pmatrix} c_3 y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right] = \mathbf{h}\left[\begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right], \qquad \begin{matrix} \bar{g}_2(\mathbf{x}) = c_3 g_2(\mathbf{x}), \\ \bar{g}_3(\mathbf{x}) = g_3(\mathbf{x}) \end{matrix}$$

ein, und erhalten

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \bar{\mathbf{h}}\left[\begin{Bmatrix} \dfrac{\bar{g}_2(\mathbf{x})}{\alpha_1} \\ \dfrac{\bar{g}_3(\mathbf{x})}{\alpha_1^2} + \dfrac{\alpha_3}{\alpha_1^3} - \dfrac{3}{2}\dfrac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4} + \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1^3}\bar{g}_2(\mathbf{x}) \end{Bmatrix}\right],$$

was die Äquivalenz mit dem Pensowschen Objekt (31) zeigt. Endlich ergibt für

$$c_2 \neq 0, \quad (e_2 = 1)$$

die Substitution

$$\bar{\mathbf{h}}\left[\begin{Bmatrix} \dfrac{y_2}{c_2} \\ y_3 - \dfrac{c_3}{2c_2} y_2^2 \end{Bmatrix}\right] = \mathbf{h}\left[\begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right], \qquad \begin{matrix} \bar{g}_2(\mathbf{x}) = \dfrac{g_2(\mathbf{x})}{c_2}, \\ \bar{g}_3(\mathbf{x}) = g_3(\mathbf{x}) - \dfrac{c_3}{2c_2} g_2(\mathbf{x})^2 \end{matrix}$$

eben

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \bar{h}\left[\begin{Bmatrix} \dfrac{\bar{g}_2(\mathbf{x})}{\alpha_1} + \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1^2} \\ \dfrac{\bar{g}_3(\mathbf{x})}{\alpha_1^2} - \dfrac{3}{2}\dfrac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4} + \dfrac{\alpha_3}{\alpha_1^3} \end{Bmatrix}\right], \tag{26}$$

und diese Objekte sind mit denen von der Transformationsformel (35) äquivalent.

Es ist interessant zu bemerken, daß falls das Pensowsche Objekt

$$y_2 = \frac{x_2}{\alpha_1}, \quad y_3 = \frac{x_3}{\alpha_1^2} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1^3} x_2 - \frac{3}{2}\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4} + \frac{\alpha_3}{\alpha_1^3}$$

durch ein Objekt mit einer Komponente von z. B. zweiter oder dritter Klasse ergänzt wird, so erfüllen die so erhaltenen Objekte

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{x_1}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1^2} \\ y_2 &= \frac{x_2}{\alpha_1}, \\ y_3 &= \frac{x_3}{\alpha_1^2} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1^3} x_2 - \frac{3}{2}\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4} + \frac{\alpha_3}{\alpha_1^3}, \end{aligned} \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{aligned} y_1 &= \frac{x_1}{\alpha_1^2} - \frac{3}{2}\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4} + \frac{\alpha_3}{\alpha_1^3}, \\ y_2 &= \frac{x_2}{\alpha_1}, \\ y_3 &= \frac{x_3}{\alpha_1^2} \frac{\alpha_2}{\alpha_1^3} x_2 - \frac{3}{2}\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4} + \frac{\alpha_3}{\alpha_1^3} \end{aligned}$$

schon die Bedingungen unseres Satzes 3 und können deshalb mit den Trans-

formationen

$$\mathbf{g}(\mathbf{x})=\begin{pmatrix}\frac{1}{x_2}\\ x_1\\ x_3-x_1x_2\end{pmatrix}\quad\text{bzw.}\quad\mathbf{g}(\mathbf{x})=\begin{pmatrix}\frac{1}{x_2}\\ \frac{x_3-x_1}{x_2}\\ x_1\end{pmatrix},$$

$$z_1=g_1\left[\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\right]=\frac{1}{x_2},\qquad z_1=g_1\left[\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\right]=\frac{1}{x_2},$$

$$z_2=g_2\left[\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\right]=x_1,\qquad z_2=g_2\left[\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\right]=\frac{x_3-x_1}{x_2},$$

$$z_3=g_3\left[\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\right]=x_3-x_1x_2,\qquad z_3=g_3\left[\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\right]=x_1,$$

$$w_1=g_1\left[\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}\right]=\frac{1}{y_2},\qquad w_1=g_1\left[\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}\right]=\frac{1}{y_2},$$

$$w_2=g_2\left[\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}\right]=y_1,\qquad w_2=g_2\left[\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}\right]=\frac{y_3-y_1}{y_2},$$

$$w_3=g_3\left[\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}\right]=y_3-y_1y_2,\qquad w_3=g_3\left[\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}\right]=y_1,$$

$$w_1=z_1\alpha_1,$$
$$w_2=\frac{z_2}{\alpha_1}+\frac{\alpha_2}{\alpha_1^2},$$
$$w_3=\frac{z_3}{\alpha_1^2}+\frac{\alpha_3}{\alpha_1^3}-\frac{3}{2}\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4}$$

in (20) übertragen werden:

$$\mathbf{y}=\mathbf{h}\left[\begin{pmatrix}g_1(\mathbf{x})\alpha_1\\ \frac{g_2(\mathbf{x})}{\alpha_1}+\frac{\alpha_2}{\alpha_1^2}\\ \frac{g_3(\mathbf{x})}{\alpha_1^2}+\frac{\alpha_3}{\alpha_1^3}-\frac{3}{2}\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4}\end{pmatrix}\right].$$

Für weitere, sich auf unseren Gegenstand beziehende Ergebnisse verweisen wir den Leser auf die demnächst erscheinende Arbeit [7] von M. HOSSZÚ.

(Eingegangen am 11. Oktober 1956.)

Literaturverzeichnis

[1] J. Aczél Lösung der Vektor-Funktionalgleichung der homogenen und inhomogenen n-dimensionalen einparametrigen „Translation", der erzeugenden Funktion von Kettenreaktionen und des stationären und nicht-stationären Bewegungsintegrals, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **6** (1955), S. 131—141.

[2] J. Aczél, Beiträge zur Theorie der geometrischen Objekte. I—II, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **7** (1956), S. 339—354.

[3] J. Aczél and M. Hosszú, On transformations with several parameters and operations in multidimensional spaces, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **7** (1956), S. 327—338.

[4] O. E. Gheorghiu, Determinarea legii de transformarea obiectelor diferenţial geometrice de clasa a IIa cu două componente in X_1, *Comunicarile Ac. R. P. Romane,* **1** (1951), S. 1017—1020.

[5] O. E. Gheorghiu, Un obiect geometric pseudolinear de clasa I cu două componente, *Comunicarile Ac. R. P. Romane,* **2** (1952), S. 1—4.

[6] O. E. Gheorghiu, Obiecte geometrice diferenţiale de clasa I cu două componente in X_1, *Studii Si. Cerc. Stiint. Timişoara,* Ser. I, **2** (1955), S. 21—25.

[7] M. Hosszú, Functional equations and algebraic methods in the theory of geometric objects. I—II—III, *Publ. Math. (Debrecen),* **5** (1957) (im Erscheinen).

[8] A. Nijenhuis, *Theory of the geometric object* (Amsterdam, 1952).

[9] Ю. Е. Пензов, О дифференциально-геометрических овьектах класса r в X_1, Мат. Сборник, **26** (1950), S. 161—182.

[10] Ю. Е. Пензов, Классификация геометрических дифференциальных объектов с двумя компонентами, ДАН СССР, **80** (1951), S. 537—540.

[11] V. Wagner, The theory of geometric objects and the theory of finite and infinite continuous groups of transformations, ДАН СССР, **46** (1945), S. 383—386.

[12] В. В. Вагнер, Классификация простых геометрических дифференциальных объектов, ДАН СССР, **69** (1949), S. 293—296.

BEITRÄGE ZUR THEORIE DER GEOMETRISCHEN OBJEKTE. V

KOVARIANTE ABLEITUNGEN VON DIFFERENTIELLEN GEOMETRISCHEN OBJEKTEN ERSTER UND ZWEITER KLASSE IM EINDIMENSIONALEN RAUM

Von

J. ACZÉL (Debrecen)

(*Vorgelegt von* G. HAJÓS)

§ 1. Einleitung

Der Begriff der kovarianten Ableitung wurde von J. A. SCHOUTEN (s.z.B. [4]) in etwas engerer Gestalt eingeführt und S. GOLAB gab in [3] bzw. im § 4 von [2] die allgemeine Gestalt der kovarianten Ableitungen der eindimensionalen differentiellen geometrischen Objekte zweiter Klasse mit einer Komponente, sowie der mit eindimensionalen gewöhnlichen Dichten von einer Komponente äquivalenten Objekte erster Klasse an (letzteres ohne Beweis). Diese Resultate finden wir hier ein wenig abgerundet unter etwas schwächeren Bedingungen (die Derivierbarkeit der Funktion **F** in der Definition (10) wird nicht vorausgesetzt) wieder und wir verallgemeinern sie z. T. für Objekte mit beliebig vielen Komponenten.

§ 2. Bezeichnungen und Definition

Wir verwenden die Bezeichnungen und Ergebnisse von [1] §§ 2, 4. Insbesondere erinnern wir daran, daß sich die Transformationsformeln der eindimensionalen differentiellen geometrischen Objekte (kurz: Objekte)

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{(u-v)} \\ x_{(u-v+1)} \\ \vdots \\ x_{(u)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_v \end{pmatrix}$$

erster bzw. zweiter bzw. dritter Klasse ($v = 1, 2, 3$) mit beliebiger Komponentenzahl $u > 1$ bei der Koordinatentransformation $\bar{\xi} = \varphi(\xi)$ $\left(\frac{d\bar{\xi}}{d\xi} \neq 0\right)$ des eindimensionalen Raumes unter gewissen einschränkenden Bedingungen als

$$\left(\alpha_1=\frac{d\bar\xi}{d\xi}\neq 0,\ \alpha_2=\frac{d^2\bar\xi}{d\xi^2},\ \alpha_3=\frac{d^3\xi}{d\xi^3}\right)$$

$$\bar{\mathbf{x}}=\mathbf{h}\left[\begin{pmatrix}\mathbf{g}_0(\mathbf{x})\\ g_1(\mathbf{x})\alpha_1\end{pmatrix}\right] \tag{1}$$

bzw.

$$\bar{\mathbf{x}}=\mathbf{h}\left[\begin{pmatrix}\mathbf{g}_0(\mathbf{x})\\ g_1(\mathbf{x})\alpha_1\\ \dfrac{g_2(\mathbf{x})}{\alpha_1}+\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1^2}\end{pmatrix}\right]\quad\left(\text{für } u=\dim\mathbf{x}=2\text{: } \bar{\mathbf{x}}=\mathbf{h}\left[\begin{pmatrix}g_1(\mathbf{x})\alpha_1\\ \dfrac{g_2(\mathbf{x})}{\alpha_1}+\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1^2}\end{pmatrix}\right]\right) \tag{2}$$

bzw.

$$\bar{\mathbf{x}}=\mathbf{h}\left[\begin{pmatrix}\mathbf{g}_0(\mathbf{x})\\ g_1(\mathbf{x})\alpha_1\\ \dfrac{g_2(\mathbf{x})}{\alpha_1}+\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1^2}\\ \dfrac{g_3(\mathbf{x})}{\alpha_1^2}+\dfrac{\alpha_3}{\alpha_1^3}-\dfrac{3}{2}\dfrac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4}\end{pmatrix}\right] \tag{3}$$

$$\left(\text{für } u=2\text{: } \bar{\mathbf{x}}=\mathbf{h}\left[\begin{pmatrix}\dfrac{g_2(\mathbf{x})}{\alpha_1}+\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1^2}\\ \dfrac{g_3(\mathbf{x})}{\alpha_1^2}+\dfrac{\alpha_3}{\alpha_1^3}\end{pmatrix}\right],\ \text{für } u=3\text{: } \bar{\mathbf{x}}=\mathbf{h}\left[\begin{pmatrix}g_1(\mathbf{x})\alpha_1\\ \dfrac{g_2(\mathbf{x})}{\alpha_1}+\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1^2}\\ \dfrac{g_3(\mathbf{x})}{\alpha_1^2}+\dfrac{\alpha_3}{\alpha_1^3}-\dfrac{3}{2}\dfrac{\alpha_3^2}{\alpha_1^4}\end{pmatrix}\right]\right)$$

($g_1(\mathbf{x})\neq 0$, $\mathbf{g}[\mathbf{h}(\mathbf{z})]=\mathbf{z}$) ergaben, während *alle* Objekte (erster bzw. zweiter bzw. dritter Klasse) mit einer Komponente mittels einer der folgenden Formeln:

$$\bar{x}=h[g(x)\alpha_1]\qquad [g(x)\neq 0], \tag{4}$$

$$\bar{x}=h[g(x)|\alpha_1|]\qquad [g(x)\neq 0] \tag{5}$$

bzw.

$$\bar{x}=h\left[\frac{g(x)}{\alpha_1}+\frac{\alpha_2}{\alpha_1^2}\right] \tag{6}$$

bzw.

$$\bar{x}=h\left[\frac{g(x)}{\alpha_1^2}+\frac{\alpha_3}{\alpha_1^3}\right] \tag{7}$$

transformiert werden.

Die direkten Summen und Produkte

$$\mathbf{x}+\mathbf{y}=\begin{pmatrix}x_I\\ \vdots\\ x_{(u)}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y_I\\ \vdots\\ y_{(u)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_I+y_I\\ \vdots\\ x_{(u)}+x_{(u)}\end{pmatrix},\quad \mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=\begin{pmatrix}x_I\,y_I\\ \vdots\\ x_{(u)}\,y_{(u)}\end{pmatrix} \tag{8}$$

werden auch hier durchwegs benützt.

Wir führen noch die Bezeichnungen

$$\mathbf{x}' = \frac{d\mathbf{x}}{d\xi} = \begin{pmatrix} \dfrac{dx_1}{d\xi} \\ \vdots \\ \dfrac{dx_{(n)}}{d\xi} \end{pmatrix}, \quad \overline{\mathbf{x}'} = \frac{d\overline{\mathbf{x}}}{d\overline{\xi}}$$

der Derivierten von $\mathbf{x}$ bzw. $\overline{\mathbf{x}}$ bezüglich ξ bzw. $\overline{\xi}$ und die Matrix

$$\mathbf{g}'(\mathbf{x}) = \left\{ \frac{dg_{(j)}}{dx_{(i)}} \right\}$$

als Derivierte der Vektor-Vektorfunktion $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ ein. So gelten für die Derivation von Vektorfunktionen ähnliche Regeln wie für die von gewöhnlichen skalaren Funktionen (Derivierten von Summen, Produkten, zusammengesetzter und inverser Funktionen usw.), z. B.

$$(9)\quad (\mathbf{h}[\mathbf{g}[\mathbf{x}(\xi)]\cdot\mathbf{u}(\xi)+\mathbf{v}(\xi)])' = \mathbf{g}'(\mathbf{h}[\mathbf{g}[\mathbf{x}(\xi)]\cdot\mathbf{u}(\xi)+\mathbf{v}(\xi)])^{-1}[\mathbf{g}'[\mathbf{x}(\xi)]\mathbf{x}'(\xi)\cdot\mathbf{u}(\xi)+ \\ +\mathbf{g}[\mathbf{x}(\xi)]\mathbf{u}'(\xi)+\mathbf{v}'(\xi)] \qquad (\mathbf{g}[\mathbf{h}(\mathbf{z})]=\mathbf{z}).$$

Jetzt geben wir die

Definition. *Die kovariante Ableitung eines (eindimensionalen differentiellen geometrischen) Objektes ν-ter Klasse ist eine Funktion*

$$(10)\qquad D\mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{y})$$

von $\mathbf{x}$ selbst, von ihrer Derivierten $\mathbf{x}'$ und von einem Hilfsobjekt $(\nu+1)$-ter Klasse $\mathbf{y}$, die ebenfalls ein Objekt ν-ter Klasse ist.

§ 3. Kovariante Ableitung von Objekten mit einer Komponente

Für die kovariante Ableitung

$$Dx = F(x, x', y)$$

der Objekte mit der Transformationsformel

$$(4)\qquad \overline{x} = h[g(x)\,\alpha_1] \qquad (g(x) \neq 0)$$

gilt

$$(11)\qquad \overline{y} = l\left[\frac{k(y)}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1^2}\right] \qquad \left(k[l(z)] = z, \quad \frac{d\alpha_1}{d\xi} = \alpha_2\right)$$

und

$$(12)\qquad \overline{x'} = \frac{d\overline{x}}{d\overline{\xi}} = \frac{d\overline{x}}{d\xi}\,\frac{d\xi}{d\overline{\xi}} = \frac{g'(x)x'\alpha_1 + g(x)\alpha_2}{g'(h[g(x)\alpha_1])}\,\frac{1}{\alpha_1},$$

während entweder

$$\overline{Dx} = F(\bar{x}, \bar{x}', \bar{y}) = H[G(Dx)\alpha_1] \tag{13}$$

oder

$$\overline{Dx} = F(\bar{x}, \bar{x}', \bar{y}) = H[G(Dx)|\alpha_1|] \tag{14}$$

gefordert werden kann.

Wir nehmen z. B. (14). Dann besteht

$$H(G[F(x, x', y)]|\alpha_1|) = \tag{15}$$

$$= F\left[h[g(x)\alpha_1], \frac{g'(x)x' + g(x)\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}{g'(h[g(x)\alpha_1])}, l\left(\frac{k(y)}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)\right].$$

Um $F(x, x', y)$ zu erhalten, müssen wir diese Funktionalgleichung lösen. Zu diesem Zweck wählen wir

$$\alpha_1 = \frac{1}{g(x)}, \quad \alpha_2 = -\frac{k(y)}{g(x)} = -\alpha_1 k(y).$$

So wird mit der Bezeichnung

$$f(z) = G\left(F\left[h(1), \frac{z}{g'[h(1)]}, l(0)\right]\right)$$

aus (15)

$$Dx = F(x, x', y) = H(|g(x)| f[g'(x)x' - g(x)k(y)]),$$

womit (15) zu einer Identität wird:

$$H(|g(x)|\,|\alpha_1|\, f[g'(x)x' - g(x)k(y)]) =$$

$$= H\left(|g(x)\alpha_1| f\left[g'(h[g(x)\alpha_1])\frac{g'(x)x' + g(x)\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}{g'(h[g(x)]\alpha_1)} - g(x)\alpha_1\left(\frac{k(y)}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1^2}\right)\right]\right).$$

Ebenso wird, falls (13) statt (14) zu Grunde genommen wird:

$$Dx = F(x, x', y) = H(g(x) f[g'(x)x' - g(x)k(y)]). \tag{16}$$

So erhielten wir den

Satz 1. *Für Objekte erster Klasse mit einer Komponente mit der Transformationsformel*

$$\bar{x} = h[g(x)\alpha_1] \tag{4}$$

(die den gewöhnlichen Dichten äquivalent sind) sind die allgemeinsten kovarianten Ableitungen von der Gestalt

$$Dx = H(g(x) f[g'(x)x' - g(x)k(y)]) \tag{16}$$

oder

$$Dx = H(|g(x)| f[g'(x)x' - g(x)k(y)]),$$

wo y ein Hilfsobjekt zweiter Klasse mit der Transformationsformel

$$\bar{y} = l\left(\frac{k(y)}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1^2}\right)$$

ist.

Was nun die Objekte mit der Transformationsformel (5) betrifft, kann (5) und (11), sowie die zu (12) analoge Formel

$$\overline{x'} = g'(h[g(x)|\alpha_1|])^{-1}\left[g'(x)x' + g(x)\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right] \operatorname{sg} \alpha_1$$

wieder in (13) oder (14), z. B. in (14) eingesetzt werden:

(17)
$$H(G[F(x, x', y)]|\alpha_1|) =$$
$$= F\left[h[g(x)|\alpha_1|], \operatorname{sg} \alpha_1 \frac{g'(x)x' + g(x)\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}{g'(h[g(x)]|\alpha_1|)}, l\left(\frac{k(y)}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1^2}\right)\right]$$

und mit

$$\alpha_1 = \frac{1}{|g(x)|}, \quad \alpha_2 = -\frac{k(y)}{|g(x)|} = -\alpha_1 k(y),$$

$$f_{\pm 1}(z) = G\left(F\left[h(\pm 1), \frac{z}{g'[h(\pm 1)]}, l(0)\right]\right)$$

wird hieraus

$$F(x, x', y) = H(|g(x)| f_{\operatorname{sg} g(x)}[g'(x)x' - g(x)k(y)]).$$

Wenn wir aber dies in (17) zurücksetzen, sehen wir, daß

$$H(|g(x)|\,|\alpha_1|\, f_{\operatorname{sg} g(x)}[g'(x)x' - g(x)k(y)]) =$$
$$= H\left(|g(x)|\,|\alpha_1|\, f_{\operatorname{sg} g(x)}\left[g'(h[g(x)|\alpha_1|] \operatorname{sg} \alpha_1 \frac{g'(x)x' + g(x)\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}{g'(h[g(x)]|\alpha_1|)} -\right.\right.$$
$$\left.\left. - g(x)|\alpha_1|\left(\frac{k(y)}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1^2}\right)\right]\right)$$

nur für $\alpha_1 > 0$ eine Identität ist, für $\alpha_1 < 0$ dagegen nur dann erfüllt wird, falls

$$f_{\pm 1}(z) = f_{\pm 1}(-z) = f_{\pm 1}(|z|)$$

gerade Funktionen sind. Wenn wir denselben Gedankengang für (13) wiederholen, haben wir den

SATZ 2. *Für Objekte erster Klasse mit einer Komponente und mit der Transformationsformel*

$$\bar{x} = h[g(x)|\alpha_1|] \tag{5}$$

(die den Weylschen Dichten äquivalent sind) sind die allgemeinsten kovarianten Ableitungen von der Gestalt

$$Dx = H(g(x) f_{\operatorname{sg} g(x)}[|g'(x)x' - g(x)k(y)|])$$

oder

$$Dx = H(|g(x)| f_{\operatorname{sg} g(x)}[|g'(x)x' - g(x)k(y)|]), \tag{18}$$

wo y ein Hilfsobjekt zweiter Klasse mit der Transformationsformel

$$\bar{y} = l\left(\frac{k(y)}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1^3}\right)$$

ist.

Wir gehen zu den kovarianten Ableitungen der Objekte zweiter Klasse mit einer Komponente über. Es ist hier

$$\bar{x} = h\left(\frac{g(x)}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1^2}\right) \qquad (g[h(z)] = z), \tag{6}$$

$$\bar{x}' = \frac{d\bar{x}}{d\xi}\frac{d\xi}{d\bar{\xi}} = \frac{\alpha_1^{-2}g'(x)x' - \alpha_1^{-3}\alpha_2 g(x) + \alpha_1^{-3}\alpha_3 - 2\alpha_1^{-4}\alpha_2^2}{g'(h[\alpha_1^{-1}g(x) + \alpha_1^{-1}\alpha_2])},$$

$$\bar{y} = l\left(\frac{k(y)}{\alpha_1^2} + \frac{\alpha_3}{\alpha_1^3} - \frac{3}{2}\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4}\right) \qquad (k[l(z)] = z),$$

$$\overline{Dx} = F(\bar{x}, \bar{x}', \bar{y}) = H\left(\frac{G(Dx)}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1^2}\right),$$

also

$$H\left(\frac{G[F(x, x', y)]}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1^2}\right) =$$

$$= F\left[h\left(\frac{g(x)}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1^2}\right), \quad \frac{\alpha_1^{-2}g'(x)x' - \alpha_1^{-3}\alpha_2 g(x) + \alpha_1^{-3}\alpha_3 - 2\alpha_1^{-4}\alpha_2^2}{g'(h[\alpha_1^{-1}g(x) + \alpha_1^{-2}\alpha_2])}, \right. \tag{19}$$

$$\left. l\left(\frac{k(y)}{\alpha_1^2} + \frac{\alpha_3}{\alpha_1^3} - \frac{3}{2}\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4}\right)\right].$$

Diese Funktionalgleichung sollte gelöst werden. Man setze

$$\alpha_2 = -\alpha_1 g(x), \quad \alpha_3 = \alpha_1\left[\frac{3}{2}g(x)^2 - k(y)\right], \quad f(z) = G\left(F\left[h(0), \frac{z}{g'[h(0)]}, l(0)\right]\right),$$

so daß aus (19)

$$Dx = F(x, x', y) = H\left[g(x) + \alpha_1 f\left(\frac{g'(x)x' + \frac{1}{2}g(x)^2 - k(y)}{\alpha_1^2}\right)\right]$$

folgt. Hier ist $\alpha_1 \neq 0$ ganz beliebig, so daß auch $\alpha_1 = 1$ gewählt werden kann:

$$Dx = F(x, x', y) = H\left(g(x) + f\left[g'(x)x' + \frac{1}{2}\, g(x)^2 - k(y)\right]\right). \tag{20}$$

Wenn wir diese beiden Formeln vergleichen, haben wir die Funktionalgleichung

$$\alpha_1 f\left(\frac{u}{\alpha_1^2}\right) = f(u) \tag{21}$$

für f, die, falls *beliebige* $\alpha_1 \neq 0$ erlaubt sind, nur durch verschwindende f erfüllt ist, da mit $\alpha_1 = -1$

$$-f(u) = f(u), \quad f(u) = 0$$

ist. Deshalb existiert im allgemeinen Fall nur die triviale kovariante Ableitung

$$Dx = H[g(x)].$$

Für die Untergruppe der Koordinatentransformationen mit $\alpha_1 = \frac{d\bar{\xi}}{d\xi} = 1$ ist (20) die allgemeinste kovariante Ableitung, da sie die aus (19) durch Einsetzen von $\alpha_1 = 1$ entspringende Funktionalgleichung erfüllt.

Für die Untergruppe $\alpha_1 > 0$ der Koordinatentransformationen folgt endlich aus (21) mit $u = 1$ und $z = \frac{1}{\alpha_1^2} > 0$ bzw. mit $u = -1$ und $z = -\frac{1}{\alpha_1^2} < 0$

$$f(z) = c_{+1}\sqrt{z} \qquad (c_{+1} = f(1))$$

bzw.

$$f(z) = c_{-1}\sqrt{-z} \qquad (c_{-1} = f(-1)),$$

d. h.

$$f(z) = c_{\operatorname{sg} z}\sqrt{|z|}.$$

Da die damit gewonnene kovariante Ableitung

$$Dx = F(x, x', y) =$$

$$= H\left(g(x) + c_{\operatorname{sg}\left[g'(x)x' + \frac{1}{2} g(x)^2 - k(y)\right]}\sqrt{g'(x)x' + \frac{1}{2}\, g(x)^2 - k(y)|}\,\right) \tag{22}$$

die Gleichung (18) für positive α_1 schon erfüllt, haben wir den

SATZ 3. *Die differentiellen geometrischen Objekte* (6) *zweiter Klasse mit einer Komponente im eindimensionalen Raum haben unter dem allgemeinen Koordinatentransformationsgruppoid keine nicht triviale kovariante Ableitung.*

Für die Untergruppen mit $\alpha_1 = \frac{d\bar{\xi}}{d\xi} = 1$ *bzw. mit* $\alpha_1 = \frac{d\bar{\xi}}{d\xi} > 0$ *sind* (20) *bzw.* (22) *die allgemeinsten kovarianten Ableitungen dieser Objekte. In diesen Formeln ist* y *ein Hilfsobjekt dritter Klasse mit*

$$\bar{y} = l\left(\frac{k(y)}{\alpha_1^2} + \frac{\alpha_3}{\alpha_1^3} - \frac{3}{2}\,\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4}\right).$$

§ 4. Kovariante Ableitung von Objekten erster Klasse mit beliebig vielen Komponenten

Für die Objekte mit der Transformationsformel

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{h}\left[\mathbf{g}(\mathbf{x})\cdot\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\\ \alpha_1\end{pmatrix}\right] \qquad (g_1(\mathbf{x}) \neq 0,\ \alpha_1 \neq 0) \tag{1}$$

wird

$$\bar{\mathbf{x}}' = \frac{d\bar{\mathbf{x}}}{d\xi}\begin{pmatrix}d\xi/d\bar{\xi}\\ \vdots\\ d\xi/d\bar{\xi}\end{pmatrix} = \mathbf{g}'\left(\mathbf{h}\left[\mathbf{g}(\mathbf{x})\cdot\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\\ \alpha_1\end{pmatrix}\right]\right)^{-1}\left[\mathbf{g}'(\mathbf{x})\mathbf{x}'\cdot\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\\ \alpha_1\end{pmatrix}+\right.$$

$$\left.+\,\mathbf{g}(\mathbf{x})\cdot\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ \alpha_2\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}\alpha_1^{-1}\\ \vdots\\ \alpha_1^{-1}\\ \alpha_1^{-1}\end{pmatrix}$$

(aus (8) und (9)) und (vgl. (2))

$$\bar{\mathbf{y}} = \boldsymbol{l}\left[\mathbf{k}(\mathbf{y})\cdot\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\\ \alpha_1\\ \alpha_1^{-1}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 0\\ \alpha_1^{-2}\alpha_2\end{pmatrix}\right] \qquad (\mathbf{k}[\boldsymbol{l}(\mathbf{z})] = \mathbf{z}),$$

$$\overline{D\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}', \bar{\mathbf{y}}) = \mathbf{H}\left[\mathbf{G}(D\mathbf{x})\cdot\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\\ \alpha_1\end{pmatrix}\right] \qquad (\mathbf{G}[\mathbf{H}(\mathbf{z})] = \mathbf{z}),$$

d. h.

$$\mathbf{H}\left[\mathbf{G}[\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{y})]\cdot\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\\ \alpha_1\end{pmatrix}\right] =$$

$$= \mathbf{F}\left(\mathbf{h}\left[\mathbf{g}(\mathbf{x})\cdot\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\\ \alpha_1\end{pmatrix}\right], \mathbf{g}'\left(\mathbf{h}\left[\mathbf{g}(\mathbf{x})\cdot\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\\ \alpha_1\end{pmatrix}\right]\right)^{-1}\left[\mathbf{g}'(\mathbf{x})\mathbf{x}'\cdot\begin{pmatrix}\alpha_1^{-1}\\ \vdots\\ \alpha_1^{-1}\\ 1\end{pmatrix}+\right.\right. \tag{23}$$

$$\left.\left.+\,\mathbf{g}(\mathbf{x})\cdot\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ \alpha_1^{-1}\alpha_2\end{pmatrix}\right], \boldsymbol{l}\left[\mathbf{k}(\mathbf{y})\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\\ \alpha_1\\ \alpha_1^{-1}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 0\\ \alpha_1^{-2}\alpha_2\end{pmatrix}\right]\right).$$

Um diese Funktionalgleichung zu lösen, setzen wir

$$\alpha_1 = \frac{1}{g_1(\mathbf{x})}, \quad \alpha_2 = -\frac{k_2(\mathbf{y})}{g_1(\mathbf{x})} = -\alpha_1 k_2(\mathbf{y})$$

und erhalten

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{y}) = \mathbf{H}\Bigg[\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ g_1(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \cdot \mathbf{f}\Bigg[\mathbf{g}_0(\mathbf{x}), \mathbf{g}'(\mathbf{x})\mathbf{x}' \cdot \begin{pmatrix} g_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ g_1(\mathbf{x}) \\ 1 \end{pmatrix} + \\ + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -k_2(\mathbf{y}) \end{pmatrix}, \mathbf{k}_0(\mathbf{y}), \frac{k_1(\mathbf{y})}{g_1(\mathbf{x})}\Bigg]\Bigg],\end{aligned} \tag{24}$$

wo die Bezeichnung

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}, \mathbf{w}_0, w_1) = \mathbf{G}\left[\mathbf{F}\left\{\mathbf{h}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{u}_0 \\ 1 \end{pmatrix}\right], \mathbf{g}'\left(\mathbf{h}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{u}_0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]\right)^{-1} \mathbf{v}, \boldsymbol{l}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{w}_0 \\ w_1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]\right\}\right]$$

verwendet wurde. Das Einsetzen zeigt, daß (24) die Gleichung (23) tatsächlich erfüllt, und wir haben den

SATZ 4. *Für die Objekte erster Klasse mit der Transformationsformel*

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{h}\left[\mathbf{g}(\mathbf{x}) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}\right] \qquad (g_1(x) \neq 0) \tag{1}$$

ist

$$\begin{aligned}D\mathbf{x} = \mathbf{H}\Bigg[\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ g_1(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \cdot \mathbf{f}\Bigg(\mathbf{g}_0(\mathbf{x}), \mathbf{g}'(\mathbf{x})\mathbf{x}' \cdot \begin{pmatrix} g_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ g_1(\mathbf{x}) \\ 1 \end{pmatrix} + \\ + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -k_2(\mathbf{y}) \end{pmatrix}, \mathbf{k}_0(\mathbf{y}), \frac{k_1(\mathbf{y})}{g_1(\mathbf{x})}\Bigg)\Bigg]\end{aligned} \tag{24}$$

die allgemeinste Gestalt der kovarianten Ableitung, wo **y** *ein Hilfsobjekt zweiter Klasse mit der Transformationsformel*

$$\bar{\mathbf{y}} = \boldsymbol{l}\left[\mathbf{k}(\mathbf{y})\cdot\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\\ \alpha_1\\ \alpha_1^{-1}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 0\\ \alpha_1^{-2}\alpha_2\end{pmatrix}\right]$$

ist. — Bei dim $\mathbf{y}=2$ *fehlt* $\mathbf{k}_0(\mathbf{y})$ *in* (24). *Für Objekte mit einer Komponente geht* (24) *in* (16) *über.*

§ 5. Kovariante Ableitungen von Objekten zweiter Klasse mit beliebig vielen Komponenten

Für die Objekte mit der Transformationsformel

(2) $$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{h}\left[\mathbf{g}(\mathbf{x})\cdot\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\\ \alpha_1\\ \alpha_1^{-1}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 0\\ \alpha_1^{-2}\alpha_2\end{pmatrix}\right] \qquad (g_1(\mathbf{x})\neq 0,\ \alpha_1\neq 0)$$

wird

$$\bar{\mathbf{x}}' = \frac{d\mathbf{x}}{d\bar{\xi}}\cdot\begin{pmatrix}d\xi/d\bar{\xi}\\ \vdots\\ d\xi/d\bar{\xi}\end{pmatrix} = \mathbf{g}'\left\{\mathbf{h}\left[\mathbf{g}(\mathbf{x})\cdot\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\\ \alpha_1\\ \alpha_1^{-1}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 0\\ \alpha_1^{-2}\alpha_2\end{pmatrix}\right]\right\}^{-1}\left[\mathbf{g}'(\mathbf{x})\mathbf{x}'\cdot\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\\ \alpha_1\\ \alpha_1^{-1}\end{pmatrix} + \right.$$

$$\left. + \mathbf{g}(\mathbf{x})\cdot\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ \alpha_2\\ \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1^2}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 0\\ \dfrac{\alpha_3\alpha_1 - 2\alpha_2^2}{\alpha_1^3}\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}\alpha_1^{-1}\\ \alpha_1^{-1}\\ \vdots\\ \alpha_1^{-1}\\ \alpha_1^{-1}\\ \alpha_1^{-1}\end{pmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{y}} = \boldsymbol{l}\left[\mathbf{k}(\mathbf{y})\cdot\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\\ \alpha_1\\ \alpha_1^{-1}\\ \alpha_1^{-2}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 0\\ \alpha_1^{-2}\alpha_2\\ \alpha_1^{-3}\alpha_3 - \dfrac{3}{2}\alpha_1^{-4}\alpha_2^2\end{pmatrix}\right],$$

(vgl. (3)) und

$$\overline{D\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}'}, \overline{\mathbf{y}}) = \mathbf{H}\left[\mathbf{G}(D\mathbf{x})\cdot\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\\ \alpha_1\\ \alpha_1^{-1}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 0\\ \alpha_1^{-2}\alpha_2\end{pmatrix}\right],$$

d. h.

$$\mathbf{H}\left[\mathbf{G}[\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{y})]\cdot\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\\ \alpha_1\\ \alpha_1^{-1}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 0\\ \alpha_1^{-2}\alpha_2\end{pmatrix}\right] = \mathbf{F}\left(\mathbf{h}\left[\mathbf{g}(\mathbf{x})\cdot\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\\ \alpha_1\\ \alpha_1^{-1}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 0\\ \alpha_1^{-2}\alpha_2\end{pmatrix}\right],\right.$$

$$(25)\ \ , \mathbf{g}'\cdot\left\{\mathbf{h}\left[\mathbf{g}(\mathbf{x})\cdot\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\\ \alpha\\ \alpha_1^{-1}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 0\\ \alpha_2^{-1}\alpha_2\end{pmatrix}\right]\right\}^{-1}\left[\mathbf{g}'(\mathbf{x})\mathbf{x}'\cdot\begin{pmatrix}\alpha_1^{-1}\\ \vdots\\ \alpha_1^{-1}\\ 1\\ \alpha_1^{-2}\end{pmatrix} + \mathbf{g}(\mathbf{x})\cdot\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ \alpha_1^{-1}\alpha_2\\ -\alpha_1^{-3}\alpha_2\end{pmatrix} +\right.$$

$$\left. + \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 0\\ \alpha_1^{-3}\alpha_3 - 2\alpha_1^{-4}\alpha_2^2\end{pmatrix}\right], \quad \left. \boldsymbol{l}\left[\mathbf{k}(\mathbf{y})\cdot\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\\ \alpha_1\\ \alpha_1^{-1}\\ \alpha_1^{-2}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 0\\ \alpha_1^{-2}\alpha_2\\ \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1^2} - \dfrac{3}{2}\dfrac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4}\end{pmatrix}\right]\right).$$

Um zu der Lösung dieser Funktionalgleichung zu gelangen, setzen wir

$$\alpha_1 = \frac{1}{g_1(\mathbf{x})}, \quad \alpha_2 = -\alpha_1 g_2(\mathbf{x}), \quad \alpha_3 = \alpha_1\left[\frac{3}{2}\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2} - k_3(\mathbf{y})\right] = \frac{\frac{3}{2}\, g_2(\mathbf{x})^2 - k_3(\mathbf{y})}{g_1(\mathbf{x})},$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}, \mathbf{w}_0, w_1, w_2) = \mathbf{G}\left[\mathbf{F}\left(\mathbf{h}\left[\begin{pmatrix}\mathbf{u}_0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\right], \mathbf{g}'\left\{\mathbf{h}\left[\begin{pmatrix}\mathbf{u}_0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\right]\right\}^{-1}\mathbf{v}, \boldsymbol{l}\left[\begin{pmatrix}\mathbf{w}_0\\ w_1\\ w_2\\ 0\end{pmatrix}\right]\right)\right]$$

und bekommen den

Satz 5. *Für die Objekte zweiter Klasse von mehr als einer Komponente mit der Transformationsformel*

$$(2) \qquad \overline{\mathbf{x}} = \mathbf{h}\left[\mathbf{g}(\mathbf{x})\cdot\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\\ \alpha_1\\ \alpha_1^{-1}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 0\\ \alpha_1^{-2}\alpha_2\end{pmatrix}\right]$$

sind

$$Dx = \mathbf{H}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ g_2(\mathbf{x}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ g_1(\mathbf{x}) \\ g_1(\mathbf{x})^{-1} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{f}\left(\mathbf{g}_0(\mathbf{x}),\ \mathbf{g}'(\mathbf{x})\mathbf{x}' \cdot \begin{pmatrix} g_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ g_1(\mathbf{x}) \\ 1 \\ g_1(\mathbf{x})^2 \end{pmatrix} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -g_1(\mathbf{x})g_2(\mathbf{x}) \\ \dfrac{g_2(\mathbf{x})^2 - 2k_3(\mathbf{y})}{2}\, g_1(\mathbf{x})^2 \end{pmatrix},\ \mathbf{k}_0(\mathbf{y}),\ \frac{k_1(\mathbf{y})}{g_1(\mathbf{x})},\ g_1(\mathbf{x})[k_2(\mathbf{y}) - g_2(\mathbf{x})]\right)\right]$$

die allgemeinsten kovarianten Ableitungen, wo $\mathbf{y}$ *ein Hilfsobjekt mit*

$$\bar{\mathbf{y}} = \boldsymbol{l}\left[\mathbf{k}(\mathbf{y}) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \alpha_1 \\ \alpha_1^{-1} \\ \alpha_1^{-2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \alpha_1^{-2}\alpha_2 \\ \alpha_1^{-3}\alpha_3 - \dfrac{3}{2}\alpha_1^{-4}\alpha_2^2 \end{pmatrix}\right]$$

ist. — (Bei niedriger Komponentenzahl kann $\mathbf{g}_0$, $\mathbf{k}_0$, k_1 *fehlen.)*

(25) ist nämlich hiermit erfüllt.

Es sei bemerkt, daß über die Funktionen $\mathbf{F}$, die die kovariante Ableitungen definieren, nirgends irgendeine Einschränkung getroffen wurde.

Fordert man, daß die kovariante Ableitung nicht nur von derselben Klasse sei, sondern auch dasselbe Transformationsgesetz wie $\mathbf{x}$ habe, so wird in unseren Formeln

$$\mathbf{G} = \mathbf{g}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{h}$$

und in den Sätzen 1, 2 sind nur (16) und (18) zu nehmen.

(Eingegangen am 8. Juni 1956.)

Literaturverzeichnis

[1] J. Aczél, Beiträge zur Theorie der geometrischen Objekte. III—IV, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **8** (1957), S. 19—52.

[2] S. Gołąb, Über den Begriff der kovarianten Ableitung, *Nieuw Arch. v. Wisk.* (3), **2** (1954), S. 90—96.

[3] S. Gołąb, Dérivée covariante des objets géométriques, *Ann. Pol. Math.*, **1** (1954), S. 107—113.

[4] J. A. Schouten und D. J. Struik, *Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie. I* (Groningen, 1935).

ON THE FACTORISATION OF FINITE ABELIAN GROUPS

By

ARTHUR D. SANDS (Glasgow)

(*Presented by* G. HAJÓS)

§ 1. Introduction

Let G be a finite abelian multiplicative group. Let A and B be subsets of G; then the product AB is defined to be the set of all elements ab with $a \in A$ and $b \in B$. AB may contain the same element many times. If AB contains each element only once and if every element of G is in AB, then we write $AB = G$ and call this a factorisation of G.

A subset A of G is said to be periodic if there exists an element g of G, different from the identity e, such that $gA = A$. A group G is said to be "good" if in every factorisation $G = AB$ at least one factor is periodic. Otherwise it is called "bad". G. HAJÓS ([4], p. 161) gives a method which he claims will give all factorisations of a good group. In § 5 we point out a slight correction needed in this method. This problem remains unsolved for bad groups.

In this paper we shall deal mainly with finite cyclic groups. N. G. DE BRUIJN has put forward the following conjecture ([2], p. 371): *if G is a finite cyclic group, $AB = G$, and A has a prime number of elements, then either A or B is periodic.* In § 3 we prove the following generalisation of this conjecture: *if G is a finite cyclic group, $G = AB$, and the number of elements in A is a power of a prime, then either A or B is periodic.*

Groups of type (p^λ, q) and (p, q, r), where λ is a positive integer and p, q and r are distinct primes, and all subgroups of them, have been shown to be good.[1] The groups of types (p^2, q^2), (p^2, q, r) and (p, q, r, s), where p, q, r and s are distinct primes, are shown to be good in § 4. All other finite cyclic groups are known to be bad.[1]

[1] See N. G. DE BRUIJN [1], p. 259.

§ 2. Preliminaries

If $AB = G$ and g and h are any elements of G, then $(gA)(hB) = ghG = G$. It follows that we need only consider those factorisations for which $e \in A$ and $e \in B$, as all other factorisations may be obtained from them by the above method.

If G is a finite cyclic group and g is a generator of G, then a subset A of G consisting of the elements $g^{\alpha_1}, g^{\alpha_2}, \ldots, g^{\alpha_n}$ is written as $A = \sum_{i=1}^{n} g^{\alpha_i}$. If A and B are subsets of G with $A = \sum_{i=1}^{n} g^{\alpha_i}$ and $B = \sum_{i=1}^{m} g^{\beta_i}$, then $AB = \left(\sum_{i=1}^{n} g^{\alpha_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{m} g^{\beta_i}\right)$ where the multiplication is carried out as though Σ meant addition and the distributive laws held. Thus, for the purposes of multiplication, we can regard A and B as polynomials in g provided that the addition of indices is carried out modulo k, where k is the order of g, i. e. that the polynomials are multiplied modulo $(g^k - 1)$. If we replace g by x and write $A(x) = \sum_{i=1}^{n} x^{\alpha_i}$ and $B(x) = \sum_{i=1}^{m} x^{\beta_i}$, then we have the relationship $A(x)B(x) = AB(x) \pmod{(x^k - 1)}$. Since g is a generator of G and A and B have n and m elements respectively, if $AB = G$ we have $k = nm$ and

$$A(x)B(x) = (1 + x + x^2 + \cdots + x^{nm-1}) \pmod{(x^{nm} - 1)}.$$

Now, if x is given the value ϱ, where ϱ is any (nm)th root of unity, we have $A(\varrho)B(\varrho) = 1 + \varrho + \cdots + \varrho^{nm-1}$, and if $\varrho \neq 1$ the right-hand side is equal to zero.[2]

Similarly, if $g_1, g_2, \ldots, g_s$ is a set of independent generators of G of orders $n_1, n_2, \ldots, n_s$ respectively, then we can write subsets A and B as

$$A = \sum_{i=1}^{n} g_1^{\alpha_{1i}} \cdots g_s^{\alpha_{si}}, \qquad B = \sum_{i=1}^{m} g_1^{\beta_{1i}} \cdots g_s^{\beta_{si}},$$

and AB is obtained by multiplying as before. This relationship can be regarded as one involving polynomials in several variables and will remain true provided that the exponents of each g_j are added modulo n_j. We shall find it convenient to regard one g_j as an indeterminate and replace it by x and to replace the others by roots of unity of appropriate orders. Thus we obtain a relationship between polynomials in a single variable x with coefficients which are roots of unity, the multiplication being carried out modulo $(x^{n_j} - 1)$.

[2] This idea is due to L. Rédei.

It will be realized from the above discussion that the cyclotomic polynomials will play an important part in this treatment of the problem. It is well known that the cyclotomic polynomials are irreducible, to the extent of a constant factor, over the rational field. We now prove the following extension of this result:

THEOREM 1. *If $F_n(x)$ denotes the nth cyclotomic polynomial, then $F_n(x)$ is irreducible, to the extent of a constant factor, over the field of the mth roots of unity if m and n are relatively prime.*

PROOF. Let ϱ be an nth primitive root of unity and σ an mth primitive root of unity. Let $G(x)=\sum_r a_r x^r$, where $a_r=\sum_s b_{r,s}\sigma^s$ and the $b_{r,s}$ are integers. Suppose that $G(\varrho)=0$. Then to prove the theorem it is sufficient to show that $G(\varrho^d)=0$ for all positive integers d relatively prime to n. We have

$$G(x)=\sum_r a_r x^r=\sum_r\Big(\sum_s b_{r,s}\sigma^s\Big)x^r,$$

$$0=G(\varrho)=\sum_{r,s} b_{r,s}\sigma^s\varrho^r.$$

For each pair of integers r, s let $t_{r,s}$ be the unique integer such that $0\leqq t_{r,s}<mn$, $t_{r,s}\equiv s \pmod m$ and $t_{r,s}\equiv r \pmod n$. Then $0=G(\varrho)=$ $=\sum_{r,s} b_{r,s}(\varrho\sigma)^{t_{r,s}}$. But $\varrho\sigma$ is an (nm)th primitive root of unity and the coefficients $b_{r,s}$ are integers. It follows by the irreducibility of $F_{nm}(x)$ over the rational field that $(\varrho\sigma)^d$ is a root of $H(x)=\sum_{r,s} b_{r,s}x^{t_{r,s}}=0$, whenever d and nm are relatively prime.

Consider the set of n numbers $1, 1+m, 1+2m, \ldots, 1+(n-1)m$. These form a complete set of residues modulo n. Hence among them are $\Phi(n)$ numbers incongruent modulo n and prime to n. Let $d=1+cm$ be any such number. Then d and n are relatively prime and d and m are relatively prime. It follows that d and nm are relatively prime. Then

$$G(\varrho^d)=\sum_{r,s} b_{r,s}\sigma^s\varrho^{dr}=\sum_{r,s} b_{r,s}((\varrho\sigma)^d)^{t_{r,s}}=H((\varrho\sigma)^d)=0.$$

LEMMA 1. *If p is a prime number, $p^\lambda=n$, where λ is a positive integer and p is not a divisor of a positive integer m, then*

$$\prod_{d\mid m} F_{nd}(x)=(x^{nm}-1)/(x^{nm/p}-1).$$

PROOF.

$$\prod_{d\mid m} F_{nd}(x)=\Big\{\prod_{d\mid nm} F_d(x)\Big\}\Big/\Big\{\prod_{d\mid nm/p} F_d(x)\Big\}=(x^{nm}-1)/(x^{nm/p}-1).$$

LEMMA 2. *If $N = p^\lambda q^\mu M$, where $p^\lambda = n$, $q^\mu = m$ and p and q are primes not dividing M, $A(x)$ is a polynomial of degree less than N with non-negative integral coefficients and $F_{nmd}(x)$ divides $A(x)$ for each divisor d of M, then $A(x)$ can be expressed as*

$$A(x) = \frac{x^N - 1}{x^{N/p} - 1} A_p(x) + \frac{x^N - 1}{x^{N/q} - 1} A_q(x)$$

where $A_p(x)$ and $A_q(x)$ are polynomials with non-negative integral coefficients.

PROOF. We make repeated use of Theorem 1 of [2] (p. 372) to show that such a representation exists with polynomials with integral coefficients. Let $M = \prod_{i=1}^{k} r_i^{\nu_i}$, where the numbers r_i are distinct primes. Then from $F_N(x) | A(x)$ it follows by Theorem 1 of [2] that

$$A(x) = \frac{x^N - 1}{x^{N/p} - 1} A_p^{(1)}(x) + \frac{x^N - 1}{x^{N/q} - 1} A_q^{(1)}(x) + \sum_{i=1}^{k} \frac{x^N - 1}{x^{N/r_i} - 1} A_{r_i}^{(1)}(x). \tag{1}$$

Now, if s is a prime dividing N, then, by Lemma 1, $F_{N/r_k}(x)$ divides $(x^N - 1)/(x^{N/s} - 1)$ if and only if $s \neq r_k$. Therefore, since $F_{N/r_k}(x) | A(x)$, it follows from (1) that $F_{N/r_k}(x) | A_{r_k}^{(1)}(x)$. Hence

$$A_{r_k}^{(1)}(x) = \frac{x^{N/r_k} - 1}{x^{N/pr_k} - 1} B_p(x) + \frac{x^{N/r_k} - 1}{x^{N/qr_k} - 1} B_q(x) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{k-1} \frac{x^{N/r_k} - 1}{x^{N/r_i r_k} - 1} B_{r_i}(x) + \frac{x^{N/r_k} - 1}{x^{N/r_k^2} - 1} B_{r_k}(x),$$

the last term only occurring if $\nu_k \geqq 2$. Now substituting this expression for $A_{r_k}^{(1)}(x)$ into (1) and writing

$$\frac{x^N - 1}{x^{N/pr_k} - 1} B_p(x) = \frac{x^N - 1}{x^{N/p} - 1} \cdot \frac{x^{N/p} - 1}{x^{N/pr_k} - 1} B_p(x)$$

etc., we have

$$A(x) = \frac{x^N - 1}{x^{N/p} - 1} A_p^{(2)}(x) + \frac{x^N - 1}{x^{N/q} - 1} A_q^{(2)}(x) + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{x^N - 1}{x^{N/r_i} - 1} A_{r_i}^{(2)}(x) +$$
$$+ \frac{x^N - 1}{x^{N/r_k^2} - 1} A_{r_k}^{(2)}(x),$$

the last term only occurring if $\nu_k \geqq 2$. Continuing in this way we finally obtain

$$A(x) = \frac{x^N - 1}{x^{N/p} - 1} A_p(x) + \frac{x^N - 1}{x^{N/q} - 1} A_q(x). \tag{2}$$

Now the method of proof of Theorem 2 of [2] (p. 374) (with $r = N\,pq$) can be used to show that $A_p(x)$ and $A_q(x)$ can be found to satisfy (2) and have non-negative integral coefficients.

This completes the proof.

§ 3. Factorisations in which the number of elements in one factor is a power of a prime

LEMMA 3. *If G is a finite abelian group and $AB = G$, where A has two or three elements, then either A or B is periodic.*

PROOF. (i) Suppose that A has two elements e and a. Then $\{a, e\}\, B = G$ and so

$$a\{a, e\}\, B = \{a^2, a\}\, B = aG = G.$$

Comparing these two statements we see that $a^2B = eB$. Therefore B is periodic or $a^2 = e$, in which case A is periodic.

(ii) Suppose that A has three elements e, a and b. Then

$$\{e, a, b\}\, B = G \tag{3}$$

and

$$a\{e, a, b\}\, B = \{a, a^2, ab\}\, B = G. \tag{4}$$

Comparing (3) and (4) we have $\{e, b\}\, B = \{a^2, ab\} B$. If bB and abB have an element in common, then B and aB must have an element in common. But this contradicts (3). Therefore $eB = abB$ and $bB = a^2B$. Hence B is periodic or $e = ab$ and $b = a^2$. In the latter case A is periodic.

This lemma holds for all finite abelian groups, cyclic or non-cyclic. But in the non-cyclic case it cannot be extended to any number greater than three

We shall assume throughout the rest of the paper that G is a finite cyclic group.

THEOREM 2. *If G is a finite cyclic group, $G = AB$, and A has p^μ elements, where p is a prime, then either A or B is periodic.*

PROOF. Let the order of G be $N = p^\lambda n$, where $p^\lambda = m$, $p \nmid n$ and $\lambda \geqq \mu$. Let $p^{\mu-1} = r$. Let a and b be generators of G of orders m and n respect-

ively. Then $g=ab$ generates G and we may suppose that

$$A=\sum_{i=1}^{pr} a^{\alpha_i} b^{\beta_i}=\sum_{i=1}^{pv} g^{\gamma_i},$$

$$B=\sum_{i=1}^{N/pv} a^{\lambda_i} b^{\mu_i}=\sum_{i=1}^{N/pv} g^{\nu_i},$$

where $\alpha_1=\beta_1=\gamma_1=\lambda_1=\mu_1=\nu_1=0$ and $0\leqq\alpha_i<m$, $0\leqq\beta_i<n$, $0\leqq\gamma_i<N$, $0\leqq\lambda_i<m$, $0\leqq\mu_i<n$ and $0\leqq\nu_i<N$. Then $\alpha_i=\gamma_i \pmod{m}$, $\beta_i=\gamma_i \pmod{n}$, $\lambda_i=\nu_i \pmod{m}$ and $\mu_i=\nu_i \pmod{n}$.

Let

$$A_a(x)=\sum_{i=1}^{pv} x^{\alpha_i}, \qquad B_a(x)=\sum_{i=1}^{N/pv} x^{\lambda_i},$$

$$A(x)=\sum_{i=1}^{pv} x^{\gamma_i}, \qquad B(x)=\sum_{i=1}^{N/pv} x^{\nu_i}.$$

Then from $AB=G$ it follows that

$$A_a(x)\,B_a(x)=n(1+x+\cdots+x^{m-1}) \quad (\mathrm{mod}\,(x^m-1)).$$

Therefore for each divisor r of m, with $r>1$, $F_r(x)\,|\,A_a(x)\,B_a(x)$ and so $F_r(x)\,|\,A_a(x)$ or $F_r(x)\,|\,B_a(x)$. Since $F_r(1)=p$, $A_a(1)=p^\mu$ and $B_a(1)=p^{\lambda-\mu}n$, it follows that $F_r(x)\,|\,A_a(x)$ for precisely μ such divisors r of p^λ. Let these be $r_1, r_2, \ldots, r_\mu$ with $r_1>r_2>\cdots>r_\mu$. We now use these results to show that there can be no two equal α_i among the exponents occurring in $\sum_{i=1}^{pr} x^{\alpha_i}$. Suppose that two such α_i are equal. Reduce the exponents of $A_a(x)$ modulo r_1 to give $A_a^{(1)}(x)$; then $F_{r_1}(x)\,|\,A_a^{(1)}(x)$ and the degree of $A_a^{(1)}(x)$ is less than r_1. Therefore

$$A_a^{(1)}(x)=(1+x^{r_1/p}+\cdots+x^{(p-1)r_1/p})\,A_a^{(1')}(x)$$

and the degree of $A_a^{(1')}(x)$ must be less than $r_1\,p$ and so its coefficients must be positive. It follows that one coefficient in $A_a^{(1')}(x)$ must be at least 2. $F_{r_2}(x)\,|\,A_a^{(1)}(x)$ and therefore $F_{r_2}(x)\,|\,A_a^{(1')}(x)$. Reduce the exponents of $A_a^{(1')}(x)$ modulo r_2 to give $A_a^{(2)}(x)$. Then $F_{r_2}(x)\,|\,A_a^{(2)}(x)$ and so

$$A_a^{(2)}(x)=(1+x^{r_2/p}+\cdots+x^{(p-1)r_2/p})\,A_a^{(2')}(x).$$

As before one coefficient in $A_a^{(2')}(x)$ must be at least 2. Continuing in this way we finally obtain

$$A_a(x)=v(1+x^{r_\mu/p}+\cdots+x^{(p-1)r_\mu/p})\,A_a^{(\mu')}(x) \quad (\mathrm{mod}\,(x^{r_\mu}-1))$$

with one coefficient of $A_a^{(\mu')}(x)$ at least 2. It follows that the sum of the coefficients in $A_a(x)$ is at least $2pv$. But we know that it is pv. Therefore no two α_i occurring as exponents in $\sum_{i=1}^{pv} x^{\alpha_i}$ are equal.

Now from $AB=G$ it follows that

$$A(x)\,B(x)=(1+x+\cdots+x^{N-1}) \quad (\text{mod }(x^N-1)).$$

Therefore for each divisor d of N, with $d>1$, $F_d(x)|A(x)B(x)$ and so $F_d(x)|A(x)$ or $F_d(x)|B(x)$.

If $F_{md}(x)|B(x)$ for all divisors d of n, then, by Lemma 1, $((x^N-1)/(x^{N/p}-1))|B(x)$ and so $g^{N/p}$ is a period of B.

Thus we may assume that for some divisor d of n, $F_{md}(x)|A(x)$. Let ϱ and σ be primitive roots of unity of orders m and n respectively. Let $n=dk$. Then $\tau=\varrho\sigma^k$ is an (md)th primitive root of unity. Therefore $F_{md}(\tau)=0$. Hence $A(\tau)=0$. Thus $\sum_{i=1}^{pv}\tau^{\gamma_i}=\sum_{i=1}^{pv}\varrho^{\alpha_i}\sigma^{k\beta_i}=0$. It follows by the irreducibility of $F_m(x)$ over the field of the nth roots of unity that $F_m(x)\,\Big|\,\sum_{i=1}^{pv} x^{\alpha_i}\sigma^{k\beta_i}$. Therefore

$$\sum_{i=1}^{pv} x^{\alpha_i}\sigma^{k\beta_i}=(1+x^{m/p}+\cdots+x^{(p-1)m/p})\,c(x),$$

where the degree of $c(x)$ is less than m/p and its coefficients are from the field of the nth roots of unity and so in this case must be powers of σ. Now using the fact that no two α_i are equal, it follows that the exponents occurring in $c(x)$ must be $0=t_1,t_2,\ldots,t_v$ with $t_1<t_2<\cdots<t_v<m/p$. Thus the numbers α_i are

$$t_1,t_2,\ldots,t_v,\; t_1+\frac{m}{p},\; t_2+\frac{m}{p},\ldots,\; t_v+\frac{m}{p},\; t_1+\frac{2m}{p},\ldots,\; t_v+(p-1)\frac{m}{p},$$

and the coefficients of $x^{t_j}, x^{t_j+m/p},\ldots,x^{t_j+(p-1)m/p}$ are equal for each j $(j=0,1,\ldots,v)$. Thus the corresponding numbers $k\beta_i$ are equal modulo n and so the corresponding numbers β_i are equal modulo d. Conversely, if the corresponding numbers β_i are equal modulo d, where $d|n$, then $F_{md}(x)|A(x)$. It follows that if $F_{md}(x)|A(x)$ so does $F_{mc}(x)$ whenever $c|d$ and also that if $F_{md_1}(x)|A(x)$ and $F_{md_2}(x)|A(x)$ so does $F_{md_3}(x)|A(x)$ where d_3 is the lowest common multiple of d_1 and d_2.

If $F_{mn}(x)|A(x)$, then $F_{md}(x)|A(x)$ for all divisors d of n and so $((x^N-1)/(x^{N/p}-1))|A(x)$ and $g^{N/p}$ is a period of A.

Let u be the greatest divisor of n such that $F_{mu}(x)|A(x)$. We may suppose that $u<n$. Then, for any divisor d of n, $F_{md}(x)|A(x)$ if and only if

$d|u$. The information about $A(x)$ which we have above can now be written as

$$A(x)=\sum_{i=1}^{v}\sum_{s=0}^{p-1} x^{t_i+sm/p+k_{i,s}m}$$

where, for each i,

$$t_i+s_1\frac{m}{p}+k_{i,s_1}m=t_i+s_2\frac{m}{p}+k_{i,s_2}m \pmod u,$$

and so

$$s_1+k_{i,s_1}p=s_2+k_{i,s_2}p \pmod u$$

for each pair s_1 and s_2 $(0\leqq s_1<p,\quad 0\leqq s_2<p)$.

Let $q_1, q_2, \dots, q_k$ be the set of prime numbers such that there is a power of each q_i dividing n which does not divide u. Let the greatest powers of q_i dividing u and n respectively be $q_i^{\delta_i}$ and $q_i^{\varepsilon_i}$. Then $\delta_i<\varepsilon_i$. Then, for each $\varkappa_i$, with $\delta_i<\varkappa_i\leqq\varepsilon_i$, $F_{mq_i^{\varkappa_i}d}(x)\,B(x)$ for every divisor d of $n/q_i^{\varepsilon_i}$. We now make repeated use of Lemma 2. From $F_{mq_1^{\varepsilon_1}d}(x)\,B(x)$ for all divisors d of $n/q_1^{\varepsilon_1}$ it follows that

$$(5)\qquad B(x)=((x^N-1)/(x^{N/p}-1))\,B_1(x)+((x^N-1)/(x^{N/q_1}-1))\,B_2(x),$$

where $B_1(x)$ and $B_2(x)$ have non-negative integral coefficients. Let $B_1(x)$ be chosen to satisfy this so that the sum of its coefficients is a maximum. Now, if $\delta_1<\varepsilon_1-1$, $F_{mq_1^{\varepsilon_1-1}d}(x)|B(x)$ for all divisors d of $n/q_1^{\varepsilon_1}$. But, by Lemma 1, all these polynomials divide $(x^N-1)/(x^{N/p}-1)$ and do not divide $(x^N-1)/(x^{N/q_1}-1)$. Therefore they divide $B_2(x)$ and since the degree of $B_2(x)$ is clearly less than N/q_1 from (5), we have

$$B_2(x)=((x^{N/q_1}-1)/(x^{p q_1}-1))\,B_p(x)+((x^{N/q_1})/(x^{N/q_1^2}-1))\,B_{q_1}(x),$$

where $B_p(x)$ and $B_{q_1}(x)$ have non-negative integral coefficients. Substituting in (5) we see that $B_p(x)=0$ from the maximality of $B_1(x)$, and we obtain

$$B(x)=((x^N-1)/(x^{N/p}-1))\,B_1(x)+((x^N-1)/(x^{N/q_1^2}-1))\,B_{q_1}(x).$$

Continuing in this way we reach

$$B(x)=((x^N-1)/(x^{N/p}-1))\,B_1(x)+((x^N-1)/(x^{N/q_1^{\varepsilon_1-\delta_1}}-1))\,B_{q_1}^{(1)}(x).$$

Now we have $F_{mq_2^{\varepsilon_2}d}(x)|B(x)$ for every divisor d of $n/q_2^{\varepsilon_2}$ and so for every divisor d of $n/q_1^{\varepsilon_1-\delta_1}q_2^{\varepsilon_2}$. Applying this to the above expression for $B(x)$ and continuing in this way we finally obtain

$$B(x)=((x^N-1)/(x^{N/p}-1))\,B_1(x)+((x^N-1)/(x^{Nu/n}-1))\,B_u(x)=$$
$$=((x^N-1)/(x^{N/p}-1))\,B_1(x)+((x^N-1)/(x^{mu}-1))\,B_u(x),$$

where the coefficients of $B_1(x)$ and $B_u(x)$ are non-negative integers.

Now consider the number of exponents in $A(x)B(x)$ which are congruent modulo mu. If one exponent arises from $((x^N-1)\,(x^{mu}-1))\,B_u(x)\,A(x)$, then all possible exponents congruent to it modulo mu arise from this term. As no element in AB is taken twice there is no repeated exponent in $A(x)B(x)$. Thus if one exponent arises from $((x^N-1)/(x^{N/p}-1))\,B_1(x)A(x)$ there can be no exponent congruent to it modulo mu arising from the other term and so all such exponents must arise from this term. Suppose that some coefficient in $B_1(x)$ is non-zero.

$$(x^N-1)/(x^{N/p}-1)=1+x^{N/p}+\cdots+x^{(p-1)N/p}.$$

Now the numbers $0,\ N/p, 2N/p,\ldots,(p-1)N/p$ are congruent to $0,\ m/p, 2m/p,\ldots,(p-1)m/p$ (modulo m) in some order. Let $h_j N/p$ be congruent to jm/p (modulo m). Then $h_{j_1}N/p+t_i+s_1m/p+k_{i,s_1}m$ is congruent to $h_{j_2}N/p+t_i+s_2m/p+k_{i,s_2}m$ (modulo mu) if and only if $j_1+s_1=j_2+s_2\,(\mathrm{mod}\,p)$. For $h_jN/p=j_1m/p+w_{j_1}m$ and $h_{j_2}N/p=j_2m/p+w_{j_2}m$ and so the two numbers are clearly congruent modulo m. Further $(h_{j_1}N/p+t_i+s_1m/p+k_{i,s_1}m)-(h_{j_2}N/p+t_i+s_2m/p+k_{i,s_2}m)=(h_{j^1}m/p-h_{j_2}m/p)\,n+m/p\,(s_1+k_{i,s_1}p-s_2-k_{i,s_2}p)$. But $u|n$ and $s_1+k_{i,s}p=s_2+k_{i,s_2}p$ (mod u). Therefore the two numbers are also congruent modulo u and so since $p\nmid u$ are congruent modulo mu. It follows from the condition $j_1+s_1=j_2+s_2$ (mod p) that whenever one exponent occurs from $((x^N-1)/(x^{N/p}-1))\,B_1(x)\,A(x)$, then the exact number of exponents congruent to it modulo mu is a multiple of p. But the total number of such exponents is $N/mu=n/u$, which is not divisible by p.

Hence $B_1(x)=0$ and $((x^N-1)/(x^{mu}-1))\,|\,B(x)$. Therefore g^{mu} is a period of B.

This completes the proof.

The groups of type $\{p^\lambda\}$, $\{p^\lambda, q\}$ and $\{p, q, r\}$, which have already been shown to be good by HAJÓS, RÉDEI and DE BRUIJN, are seen to be good as an immediate consequence of this theorem. The case of Theorem 2, in which $\mu=1$, i. e. A has a prime number of elements, is a conjecture of N. G. DE BRUIJN and is equivalent to a conjecture of his concerning a factorisation of the integers considered as an abelian group under addition.[3] From the second form of the conjecture he deduces a result concerning A-bases for the set of integers.[3] It is possible, by using Theorem 2 and the result of HAJÓS, that if in a factorisation of the integers one factor is finite then the other factor is periodic, to find all factorisations of the integers in which the number of elements in one factor is the power of a prime.[4] For if m is the period of the infinite factor, then we obtain a factorisation of the cyclic group of order

[3] See N. G. DE BRUIJN [2], p. 371, and [3], pp. 240—242.

[4] See G. HAJÓS [4], pp. 160—161.

m in which one factor has p^μ elements and, by Theorem 2, the method of HAJÓS ([4], p. 161) gives all such factorisations. Thus by letting m run through all multiples of p^μ we can obtain all such factorisations.

§ 4. Good groups

In this section we show that the three remaining undecided types of cyclic group are good. In each of these groups Theorem 2 covers all but one essential type of factorisation. The remaining factorisation has to be dealt with as a special case and in the case of (p, q, r, s) this is done by a lengthy direct application of Theorem 1 to each of the different possibilities arising.

THEOREM 3. *If a group G is of type (p^2, q^2), where p and q are different primes, then G is good.*

PROOF. Let $AB = G$. The essentially different cases which have to be considered are those in which A has p elements, p^2 elements and pq elements. Let $p^2q^2 = n$.

The first two of these cases are covered by Theorem 2.

Let A have pq elements. Let g be a generator of G. Let

$$A = \sum_{i=1}^{pq} g^{\gamma_i} \quad \text{and} \quad B = \sum_{i=1}^{pq} g^{\nu_i}.$$

Let

$$A(x) = \sum_{i=1}^{pq} x^{\gamma_i} \quad \text{and} \quad B(x) = \sum_{i=1}^{pq} x^{\nu_i}.$$

Then

$$A(x)B(x) = (1 + x + \cdots + x^{n-1}) \pmod{(x^n - 1)}.$$

Therefore $F_n(x)$ divides $A(x)\,B(x)$ and so $F_n(x)|A(x)$ or $F_n(x)|B(x)$. Since A and B have the same number of elements we may suppose without loss of generality that $F_n(x)|A(x)$. Then, by Theorem 2 of [2] (p. 374), we have

$$A(x) = ((x^n - 1)/(x^{n/p} - 1))\,f_p(x) + ((x^n - 1)/(x^{n/q} - 1))\,f_q(x)$$

where $f_p(x)$ and $f_q(x)$ are polynomials with non-negative integral coefficients. Now

$$A(1) = pq = pf_p(1) + qf_q(1).$$

Therefore either $f_p(1) = q$ and $f_q(1) = 0$ or $f_p(1) = 0$ and $f_q(1) = p$. In the first case $f_q(x) = 0$ and $((x^n - 1)/(x^{n/p} - 1))|A(x)$, i. e. $g^{n/p}$ is a period of A. In the second case $f_p(x) = 0$ and $((x^n - 1)/(x^{n/q} - 1))|A(x)$, i. e. $g^{n/q}$ is a period of A.

THEOREM 4. *If a group G is of type (p^2, q, r), where p, q and r are different primes, then G is good.*

PROOF. Let a, b and c be generators of G of orders p^2, q and r respectively. Let ϱ, σ and τ be primitive roots of unity of orders p^2, q and r respectively.

Let $AB = G$.

The essentially different cases which have to be considered are those in which A has p elements, p^2 elements, q elements and pq elements.

The first three of these are covered by Theorem 2.

Let A have pq elements, then B has pr elements. Let

$$A = \sum_{i=0}^{pq-1} a^{\alpha_i} b^{\beta_i} c^{\gamma_i} \quad \text{and} \quad B = \sum_{i=0}^{pr-1} a^{\lambda_i} b^{\mu_i} c^{\nu_i}.$$

Then, from $AB = G$, we have

$$\left(\sum_{i=0}^{pq-1} x^{\beta_i}\right)\left(\sum_{i=0}^{pr-1} x^{\mu_i}\right) = p^2 r(1 + x + \cdots + x^{q-1}) \quad (\text{mod } (x^q - 1)).$$

Therefore $F_q(x) \Big| \sum_{i=0}^{pq-1} x^{\beta_i}$ or $\sum_{i=0}^{pr-1} x^{\mu_i}$. But $F_q(1) = q$ and $q \nmid pr$. It follows that $F_q(x) \Big| \sum_{i=0}^{pq-1} x^{\beta_i}$. Hence the numbers β_i must be $0, 1, \ldots, q-1$ and each must occur p times. Similarly it can be shown that the numbers ν_i are $0, 1, \ldots, r-1$, each occuring p times. Also from $AB = G$ we have $\left(\sum_{i=0}^{pq-1} x^{\alpha_i}\right)\left(\sum_{i=0}^{pr-1} x^{\lambda_i}\right) = qr(1 + x + \cdots + x^{p^2} - 1) \; (\text{mod } (x^{p^2} - 1))$. Therefore $F_{p^2}(x)$ and $F_p(x)$ are divisors of the left-hand side. Since $F_{p^2}(1) = F_p(1) = p$ it follows that $F_{p^2}(x)$ divides either $\sum_{i=0}^{pq-1} x^{\alpha_i}$ or $\sum_{i=0}^{pr-1} x^{\lambda_i}$ and that $F_p(x)$ divides the other.

Replacing a, b and c by ϱ, σ and τ respectively we have

$$\left(\sum_{i=0}^{pq-1} \varrho^{\alpha_i} \sigma^{\beta_i} \tau^{\gamma_i}\right)\left(\sum_{i=0}^{pr-1} \varrho^{\lambda_i} \sigma^{\mu_i} \tau^{\nu_i}\right) = 0.$$

Since q and r may be interchanged we may assume, without loss of generality, that $\sum_{i=0}^{pq-1} \varrho^{\alpha_i} \sigma^{\beta_i} \tau^{\gamma_i} = 0$. It follows that $F_q(x) \Big| \sum_{i=0}^{pq-1} \varrho^{\alpha_i} \tau^{\gamma_i} x^{\beta_i}$ and so that[5]

$$\sum_{i\,;\,\beta_i = 0} \varrho^{\alpha_i} \tau^{\gamma_i} = \sum_{i\,;\,\beta_i = 1} \varrho^{\alpha_i} \tau^{\gamma_i} = \cdots = \sum_{i\,;\,\beta_i = q-1} \varrho^{\alpha_i} \tau^{\gamma_i}.$$

[5] This notation means that the summation is to be taken over those i for which $\beta_i = 0$ etc.

We know that each number β_i occurs precisely p times and so that there are p elements in each sum.

Let $A_{k,h}(x) = \sum_{i;\beta_i=k} \tau^{\gamma_i} x^{\alpha_i} - \sum_{i;\beta_i=h} \tau^{\gamma_i} x^{\alpha_i}$ for $k \neq h$ $(k=0, 1, \ldots, q-1;$ $h=0, 1, \ldots, q-1)$. Then ϱ is a root of $A_{k,h}(x)=0$ and so, by the irreducibility of $F_{p^2}(x)$ over the field of the rth roots of unity, $F_{p^2}(x) | A_{k,h}(x)$. Since there are $2p$ terms in $A_{k,h}(x)$, either $A_{k,h}(x)$ is zero or else the exponents of x are $m, n, m+p, n+p, \ldots, m+p^2-p, n+p^2-p$ where $0 \leq m < p$, $0 \leq n < p$ and m may be equal to n.

If for some pair k, h, $A_{k,h}(x) \neq 0$ and $m \neq n$, then the coefficients of $x^m, x^{m+p}, \ldots, x^{m+p^2-p}$ are equal and the coefficients of $x^n, x^{n+p}, \ldots, x^{n+p^2-p}$ are equal. If $r \neq 2$, $\tau^{t_1} = -\tau^{t_2}$ is impossible and so $m, m+p, \ldots, m+p^2-p$ must occur as exponents in $\sum_{i;\beta_i=k} x^{\alpha_i}$ and $n, n+p, \ldots, n+p^2-p$ as exponents in $\sum_{i;\beta_i=h} x^{\alpha_i}$ or vice versa. Hence $\sum_{i;\beta_i=k} \varrho^{\alpha_i} \tau^{\gamma_i} = 0$ and so it follows that $\sum_{i;\beta_i=t} \varrho^{\alpha_i} \tau^{\gamma_i} = 0$ for $t=0, 1, \ldots, q-1$. Then $F_{p^2}(x) \Big| \sum_{i;\beta_i=t} x^{\alpha_i} \tau^{\gamma_i}$ and it follows easily that the numbers α_i are equal to $m_t, m_t+p, \ldots, m_t+p^2-p$ and that all γ_i in this polynomial are equal. Thus a^p is a period of A.

If $r=2$, then $\tau^{t_1} = -\tau^{t_2}$ is a possibility since $\tau = -1$. Let us suppose that $\sum_{i;\beta_i=k} \varrho^{\alpha_i}(-1)^{\gamma_i} \neq 0$. Then these exponents α_i are not all congruent to m nor all congruent to n modulo p. The complementary sets of α_i congruent to m and to n modulo p must occur in $\sum_{i;\beta_i=h} \varrho^{\alpha_i}$. Let h' be different from k, $0 \leq h' < q$. If $A_{k,h'}(x) = 0$, then $\sum_{i;\beta_i=h'} x^{\alpha_i}$ contains the same α_i as $\sum_{i;\beta_i=k} x^{\alpha_i}$. If $A_{k,h'}(x) \neq 0$, then $\sum_{i;\beta_i=h'} x^{\alpha_i}$ contains the complementary sets of α_i and so the same α_i as $\sum_{i;\beta_i=h} x^{\alpha_i}$. Now, since $r=2$, p and q are odd. Also $F_{p^2}(x)$ or $F_p(x)$ divides $\sum_{i=0}^{pq-1} x^{\alpha_i}$. But if $F_p(x) \Big| \sum_{i=0}^{pq-1} x^{\alpha_i}$, then there are the same number of α_i congruent to 0, to 1, ... and to $p-1$ modulo p. This is impossible since we have seen that every α_i is congruent to m or to n modulo p and that p is odd. If $F_{p^2}(x) \Big| \sum_{i=0}^{pq-1} x^{\alpha_i}$, then there must be the same number of α_i equal to m, to $m+p, \ldots$ and to $m+p^2-p$. This is impossible since m itself occurs say with those $\beta_i = h'$ such that $A_{k,h'}(x) = 0$ and some other number congruent to m modulo p occurs with those h' such that $A_{k,h'}(x) \neq 0$, and

there are q such numbers h' altogether and q is odd. Therefore $\sum_{i;\beta_i=k} \varrho^{\alpha_i}(-1)^{\gamma_i}=0$ and a^p is a period of A as before.

If $A_{k,h}(x)\neq 0$ for some pair k, h but for every such case $m=n$, then the coefficients of $x^m, x^{m+p}, \ldots, x^{m+p^2-p}$ are equal. The coefficients consist of sums or differences of two powers of τ. They may be of the type $\tau^{t_1}+\tau^{t_2}$, $\tau^{t_1}-\tau^{t_2}$, or $-\tau^{t_1}-\tau^{t_2}$. If $r\neq 2$, different types cannot be equal to each other. But neither the first type only nor the last type only can occur as there must be both plus and minus signs in $A_{k,h}(x)$. Therefore, if $r\neq 2$, the second type only can occur. Now, as $A_{k,h}(x)\neq 0$, the coefficients cannot be zero. It is then easily seen that all the powers of τ with a plus sign must be equal and that all the powers of τ with a minus sign must be equal. Also, from the fact that only the second type occur, it follows that the numbers α_i for which $\beta_i=k$ are all congruent to m modulo p but that no number occurs twice. Hence these numbers are $m, m+p, \ldots, m+p^2-p$. It follows that $\sum_{i;\beta_i=k} \varrho^{\alpha_i}\tau^{\gamma_i}=0$. Thus, as before, a^p is a period of A.

If $r=2$, then $\tau=-1$ and all the coefficients must be $+2$ or -2 (0 cannot occur as $A_{k,h}(x)\neq 0$). If all are $+2$, then $\gamma_i=0$ when $\beta_i=k$ and $\gamma_i=1$ when $\beta_i=h$. Since there can be no repeated element in A, there can be no repeated α_i with $\beta_i=k$, $\gamma_i=0$ and so the numbers α_i occurring with $\beta_i=k$ must be $m, m+p, \ldots, m+p^2-p$. Then $\sum_{i;\beta_i=k} \varrho^{\alpha_i}\tau^{\gamma_i}=0$ and a^p is a period of A as before. Similarly, if all the coefficients are -2, a^p is a period of A.

There remains the case when all $A_{k,h}(x)$ are zero. Then we have the coefficients of each x^{α_i} in $A_{k,h}(x)$ equal to zero. Therefore for all k, h, t

$$\sum_{\substack{i;\beta_i=k\\ \alpha_i=t}} \tau^{\gamma_i} - \sum_{\substack{i;\beta_i=h\\ \alpha_i=t}} \tau^{\gamma_i}=0.$$

From this it follows that $F_r(x)$ divides $\sum_{i;\beta_i=k,\alpha_i=t} x^{\gamma_i} - \sum_{i;\beta_i=h,\alpha_i=t} x^{\gamma_i}$. Therefore either this polynomial is identically zero and so contains the same γ_i in each sum, or else one sum has the numbers γ_i equal to $0, 1, \ldots, r-1$ and the other sum is empty. This is so since no γ_i can occur twice in either sum, as this would give a repeated element in A. It follows that any given α_i occurs the same number of times with each β_i or else r times with some β_i and not at all with others. Each β_i occurs p times and from $F_{p^2}(x)$ or $F_p(x) \Big| \sum_{i=0}^{pq-1} x^{\alpha_i}$ there at most q of any α_i. So those α_i occurring with each β_i occur only once with each β_i and from the above occur with the same γ_i.

If $F_{p^2}(x) \Big| \sum_{i=0}^{pq-1} x^{\alpha_i}$, there are q exponents α_i occurring between 0 and $p-1$, between p and $2p-1, \ldots$, and between p^2-p and p^2-1. If $F_p(x) \Big| \sum_{i=0}^{pq-1} x^{\alpha_i}$, there are q exponents α_i congruent to 0, to 1, ..., to $p-1$ modulo p. Therefore, since $r \nmid q$, there can be no α_i occurring in sets of r. It follows that b is a period of A.

This completes the proof.

THEOREM 5. *If G is a group of type (p, q, r, s), where p, q, r and s are different primes, then G is good.*

PROOF. Let a, b, c and d be generators of G of orders p, q, r and s respectively. Let ϱ, σ, τ and ω be primitive roots of unity of orders p, q, r and s respectively.

Let $AB=G$. We have to consider the case in which A has pq elements and the case in which A has p elements.

The second of these is covered by Theorem 2.

Let A have pq elements. Then B has rs elements. Let

$$A=\sum_{i=0}^{pq-1} a^{\alpha_i} b^{\beta_i} c^{\gamma_i} d^{\delta_i} \quad \text{and} \quad B=\sum_{i=0}^{rs-1} a^{\lambda_i} b^{\mu_i} c^{\nu_i} d^{\varkappa_i}.$$

We assume that $\alpha_0=\beta_0=\gamma_0=\delta_0=\lambda_0=\mu_0=\nu_0=\varkappa_0=0$. Then, it can be shown, as before, that the numbers α_i are $0, 1, \ldots, p-1$ each occurring q times, that the numbers β_i are $0, 1, \ldots, q-1$ each occurring p times, that the numbers ν_i are $0, 1, \ldots, r-1$ each occurirng s times, and that the numbers $\varkappa_i$ are $0, 1, \ldots, s-1$ each occurring r times.

On replacing a, b, c and d by roots of unity of suitable orders we obtain, as before, products of sums of complex numbers equal to zero. We shall make use of the fact that one or other of the corresponding sums arising from A and from B is zero in each case. We may suppose, without loss of generality, that $\sum_{i=0}^{pq-1} \varrho^{\alpha_i} \sigma^{\beta_i} \tau^{\gamma_i} \omega^{\delta_i}=0$.

We show that G is good by consideration of the various combinations of sums of products of two roots of unity, one ϱ or σ, the other τ or ω, equal to zero.

(6) $$\sum_{i=0}^{pq-1} \varrho^{\alpha_i} \tau^{\gamma_i}=0$$

implies that $F_p(x) \Big| \sum_{i=0}^{pq-1} x^{\alpha_i} \tau^{\gamma_i}$ and so that

$$\sum_{i;\,\alpha_i=0} \tau^{\gamma_i}=\sum_{i;\,\alpha_i=1} \tau^{\gamma_i}=\cdots=\sum_{i;\,\alpha_i=p-1} \tau^{\gamma_i}.$$

Since there are q elements in each of these sums, there must be precisely the same powers of τ occurring in each sum. Therefore γ_i consists of q blocks of p equal elements if (6) holds. Similarly

(7) $$\sum_{i=0}^{pq-1} \varrho^{\alpha_i}\omega^{\delta_i}=0$$

implies that δ_i consists of q blocks of p equal elements,

(8) $$\sum_{i=0}^{pq-1} \sigma^{\beta_i}\tau^{\gamma_i}=0$$

implies that γ_i consists of p blocks of q equal elements,

(9) $$\sum_{i=0}^{pq-1} \sigma^{\beta_i}\omega^{\delta_i}=0$$

implies that δ_i consists of p blocks of q equal elements,

(10) $$\sum_{i=0}^{rs-1} \varrho^{\lambda_i}\tau^{\nu_i}=0$$

implies that λ_i consists of s blocks of r equal elements,

(11) $$\sum_{i=0}^{rs-1} \varrho^{\lambda_i}\omega^{\varkappa_i}=0$$

implies that λ_i consists of r blocks of s equal elements,

(12) $$\sum_{i=0}^{rs-1} \sigma^{\mu_i}\tau^{\nu_i}=0$$

implies that μ_i consists of s blocks of r equal elements, and

(13) $$\sum_{i=0}^{rs-1} \sigma^{\mu_i}\omega^{\varkappa_i}=0$$

implies that μ_i consists of r blocks of s equal elements.

From $AB=G$ we have (6) or (10) true, (8) or (12) true, (7) or (11) true and (9) or (13) true.

We consider the possible cases arising from these results.

(i) (6), (7), (8) and (9) true.

(6) and (8) imply that all γ_i are equal.

(7) and (9) imply that all δ_i are equal.

Since there can be no repeated element in A and there are only pq different pairs (α_i, β_i) each of these pairs must be present precisely once and so ab is a period of A.

(ii) (6), (7) and (8) true.

(6) and (8) imply that all γ_i are equal and so that $\gamma_i = 0$ for all i. Therefore from $\sum_{i=0}^{pq-1} \varrho^{\alpha_i}\sigma^{\beta_i}\tau^{\gamma_i}\omega^{\delta_i} = 0$ it follows that $\sum_{i=0}^{pq-1} \varrho^{\alpha_i}\sigma^{\beta_i}\omega^{\delta_i} = 0$. Therefore $F_q(x) \Big| \sum_{i=0}^{pq-1} \varrho^{\alpha_i}\omega^{\delta_i}x^{\beta_i}$. It follows that

$$\sum_{i;\beta_i=0} \varrho^{\alpha_i}\omega^{\delta_i} = \sum_{i;\beta_i=1} \varrho^{\alpha_i}\omega^{\delta_i} = \cdots = \sum_{i;\beta_i=q-1} \varrho^{\alpha_i}\omega^{\delta_i}.$$

But, from (7), $\sum_{i=0}^{pq-1} \varrho^{\alpha_i}\omega^{\delta_i} = 0$. Therefore for each k $(k = 0, 1, \ldots, q-1)$ $\sum_{i;\beta_i=k} \varrho^{\alpha_i}\omega^{\delta_i} = 0$. But we know that each number $\beta_i = k$ occurs p times. Now $F_p(x) \Big| \sum_{i;\beta_i=k} x^{\alpha_i}\omega^{\delta_i}$. It follows that the numbers α_i in each such sum are $0, 1, \ldots, p-1$ and that all δ_i in each sum are equal.

Hence a is a period of A.

(iii) The other cases involving three of the first four relationships holding true are similar to (ii).

(iv) (6) and (8) true, (11) and (13) true.

(6) and (8) together imply that all $\gamma_i = 0$.

If $\sum_{i=0}^{pq-1} \varrho^{\alpha_i}\sigma^{\beta_i} = 0$, then it follows easily that the pairs (α_i, β_i) consist of all pairs (k, h) $(0 \leq k < p, 0 \leq h < q)$ each pair being taken precisely once. We have assumed that $\sum_{i=0}^{pq-1} \varrho^{\alpha_i}\sigma^{\beta_i}\tau^{\gamma_i}\omega^{\delta_i} = 0$. Since $\gamma_i = 0$ for all i it follows that $\sum_{i=0}^{pq-1} \varrho^{\alpha_i}\sigma^{\beta_i}\omega^{\delta_i} = 0$. Then

$$\sum_{i;\beta_i=0} \varrho^{\alpha_i}\omega^{\delta_i} = \sum_{i;\beta_i=1} \varrho^{\alpha_i}\omega^{\delta_i} = \cdots = \sum_{i;\beta_i=q-1} \varrho^{\alpha_i}\omega^{\delta_i}.$$

But we know from the above that, with each β_i, α_i occurs as $0, 1, \ldots, p-1$. It follows either that all δ_i are equal in each sum and so that a is a period of A, or that the same δ_i occur with the same α_i in each set of p and so that b is a period of A.

Since $\gamma_i = 0$ for all i, if $\sum_{i=0}^{pq-1} \varrho^{\alpha_i}\sigma^{\beta_i}\tau^{\gamma_i} = 0$ then $\sum_{i=0}^{pq-1} \varrho^{\alpha_i}\sigma^{\beta_i} = 0$ and A is periodic as above.

Thus we may assume that $\sum_{i=0}^{rs-1} \varrho^{\lambda_i}\sigma^{\mu_i} = 0$ and that $\sum_{i=0}^{rs-1} \varrho^{\lambda_i}\sigma^{\mu_i}\tau^{\nu_i} = 0$.

If $\sum_{i=0}^{pq-1} \varrho^{\alpha_i}\tau^{\gamma_i}\omega^{\delta_i}=0$, then $\sum_{i=0}^{pq-1} \varrho^{\alpha_i}\omega^{\delta_i}=0$ which is (7). Then from (6), (7) and (8) we have A periodic as in (ii). Thus we may also assume that $\sum_{i=0}^{rs-1} \varrho^{\lambda_i}\tau^{\nu_i}\omega^{\varkappa_i}=0$.

From $\sum_{i=0}^{rs-1} \varrho^{\lambda_i}\sigma^{\mu_i}\tau^{\nu_i}=0$ we have $F_r(x)\Big|\sum_{i=0}^{rs-1} \varrho^{\lambda_i}\sigma^{\mu_i}x^{\nu_i}$ and so that

$$\sum_{i;\nu_i=0} \varrho^{\lambda_i}\sigma^{\mu_i}=\sum_{i;\nu_i=1} \varrho^{\lambda_i}\sigma^{\mu_i}=\cdots=\sum_{i;\nu_i=r-1} \varrho^{\lambda_i}\sigma^{\mu_i}=0.$$

But $\sum_{i=0}^{rs-1} \varrho^{\lambda_i}\sigma^{\mu_i}=0$. Therefore $\sum_{i;\nu_i=k} \varrho^{\lambda_i}\sigma^{\mu_i}=0$ for $k=0,1,\ldots,r-1$. Similarly, from $\sum_{i=0}^{rs-1} \varrho^{\lambda_i}\tau^{\nu_i}\omega^{\varkappa_i}=0$ and (11) we have $\sum_{i;\nu_i=k} \varrho^{\lambda_i}\omega^{\varkappa_i}=0$. Now there are s elements in each sum and $F_s(x)\mid \sum_{i;\nu_i=k} \varrho^{\lambda_i}x^{\varkappa_i}$. Therefore in each sum $\varkappa_i=0,1,\ldots,s-1$ and all the λ_i in each sum are equal. Thus $\sum_{i;\nu_i=k} \varrho^{\lambda_i}\sigma^{\mu_i}=0$ becomes $\varrho^{\lambda_{i,k}}\sum_{i;\nu_i=k} \sigma^{\mu_i}=0$. It follows that q divides s. Since this is not possible A must be periodic.

(v) (7), (9), (10) and (12) true is similar to (iv).

(vi) (6), (7), (12) and (13) true.

(12) and (13) imply that $\mu_i=0$ for all i. Then $\sum_{i=0}^{rs-1} \varrho^{\lambda_i}\sigma^{\mu_i}=0$ implies that $\sum_{i=0}^{rs-1} \varrho^{\lambda_i}=0$ and so that $p\mid rs$, which is not possible. Therefore $\sum_{i=0}^{pq-1} \varrho^{\alpha_i}\sigma^{\beta_i}=0$ and the pairs (α_i, β_i) consist of every pair taken once, as before. $\sum_{i=0}^{rs-1} \varrho^{\lambda_i}\sigma^{\mu_i}\tau^{\nu_i}=0$ and $\sum_{i=0}^{rs-1} \varrho^{\lambda_i}\sigma^{\mu_i}\omega^{\delta_i}=0$ imply (10) and (11) true. In this case cd can be shown to be a period of B as ab was of A in (i).

From symmetry we may assume without loss of generality that $\sum_{i=0}^{pq-1} \varrho^{\alpha_i}\sigma^{\beta_i}\tau^{\gamma_i}=0$. Then from (6) it follows, by an argument used before, that $\sum_{i;\beta_i=k} \varrho^{\alpha_i}\tau^{\gamma_i}=0$ for $k=0,1,\ldots,q-1$. Since in each sum $\alpha_i=0,1,\ldots,p-1$ we have that all γ_i in each sum are equal. If also $\sum_{i=0}^{pq-1} \varrho^{\alpha_i}\sigma^{\beta_i}\omega^{\delta_i}=0$, then from (7) it follows that $\sum_{i;\beta_i=k} \varrho^{\alpha_i}\omega^{\delta_i}=0$ and so that all δ_i in each sum are equal.

In this case a is a period of A. We may therefore assume that $\sum_{i=0}^{rs-1} \varrho^{\lambda_i} \sigma^{\mu_i} \omega^{\varkappa_i} = 0$ and thus that $\sum_{i=0}^{rs-1} \varrho^{\lambda_i} \omega^{\varkappa_i} = 0$, since all $\mu_i = 0$. If now $\sum_{i=0}^{rs-1} \varrho^{\lambda_i} \tau^{\nu_i} \omega^{\varkappa_i} = 0$, then $\sum_{i;\, \nu_i = k} \varrho^{\lambda_i} \omega^{\varkappa_i} = 0$ for $k = 0, 1, \ldots, r-1$. But we know that each ν_i occurs s times. It follows from $F_s(x) \mid \sum_{i;\, \nu_i = k} \varrho^{\gamma_i} x^{\varkappa_i}$ that the numbers $\varkappa_i$ are $0, 1, \ldots, s-1$ and that all λ_i are equal in each sum. Thus d is a period of B.

We may therefore assume that $\sum_{i=0}^{rs-1} \varrho^{\lambda_i} \tau^{\nu_i} \omega^{\varkappa_i} \neq 0$, i. e. that $\sum_{i=0}^{pq-1} \varrho^{\alpha_i} \tau^{\gamma_i} \omega^{\delta_i} = 0$.

We now have the following relationships:

$$\sum_{i=0}^{pq-1} \varrho^{\alpha_i} \sigma^{\beta_i} \tau^{\gamma_i} \omega^{\delta_i} = 0; \quad \sum_{i=0}^{pq-1} \varrho^{\alpha_i} \sigma^{\beta_i} \tau^{\gamma_i} = 0;$$

$$\sum_{i=0}^{pq-1} \varrho^{\alpha_i} \tau^{\gamma_i} \omega^{\delta_i} = 0; \quad \sum_{i=0}^{pq-1} \varrho^{\alpha_i} \tau^{\gamma_i} = 0 \quad \text{and} \quad \sum_{i=0}^{pq-1} \varrho^{\alpha_i} \sigma^{\beta_i} = 0.$$

From these it follows that $\sum_{i;\, \beta_i = k} \varrho^{\alpha_i} \tau^{\gamma_i} \omega^{\delta_i} = 0$ and that $\sum_{i;\, \beta_i = k} \varrho^{\alpha_i} \tau^{\gamma_i} = 0$ for $k = 0, 1, \ldots, q-1$. Therefore $\sum_{i;\, \beta_i = k,\, \delta_i = h} \varrho^{\alpha_i} \tau^{\gamma_i} = 0$. But there are p β_i equal to k and so less than or equal to p cases in which we have $\delta_i = h$ also. If there are less than p cases, then from $\sum_{i;\, \beta_i = k,\, \delta_i = h} \varrho^{\alpha_i} \tau^{\gamma_i} = 0$ we deduce that there must be a multiple of r. Summing over δ_i for each $\beta_i = k$ we have p a multiple of r, which is impossible. Hence there must be p equal δ_i with each set of equal β_i. $\sum_{i;\, \beta_i = k} \varrho^{\alpha_i} \tau^{\gamma_i} = 0$ implies that all γ_i are equal in each sum. Since we already know that the numbers α_i in each sum are $0, 1, \ldots, p-1$, it follows that a is a period of A.

(vii) (8), (9), (10) and (11) true is similar to (vi).

(viii) (6), (9), (11) and (12) true.

Suppose that $\sum_{i=0}^{pq-1} \varrho^{\alpha_i} \sigma^{\beta_i} \tau^{\gamma_i} = 0$. Then from (6) it follows that $\sum_{i;\, \beta_i = k} \varrho^{\alpha_i} \tau^{\beta_i} = 0$ for $k = 0, 1, \ldots, q-1$. Since there are p elements in each sum, it follows that the numbers α_i are $0, 1, \ldots, p-1$ and that all γ_i in each sum are equal. $\sum_{i=0}^{pq-1} \varrho^{\alpha_i} \sigma^{\beta_i} \tau^{\gamma_i} \omega^{\delta_i} = 0$ and we have assumed that $\sum_{i=0}^{pq-1} \varrho^{\alpha_i} \sigma^{\beta_i} \tau^{\gamma_i} = 0$. It follows that $\sum_{i;\, \delta_i = k} \varrho^{\alpha_i} \sigma^{\beta_i} \tau^{\gamma_i} = 0$ for $k = 0, 1, \ldots, s-1$. From (9) δ_i occur in blocks of

q equal elements. Therefore in each sum there must be a multiple of q, say hq, terms and these occur as h with each equal β_i. Therefore for each $i, \delta_i = k$,

$$\sum_{i;\,\beta_i=0,\,\delta_i=k} \varrho^{\alpha_i}\tau^{\gamma_i} = \sum_{i;\,\beta_i=1,\,\delta_i=k} \varrho^{\alpha_i}\tau^{\gamma_i} = \cdots = \sum_{i;\,\beta_i=q-1,\,\delta_i=k} \varrho^{\alpha_i}\tau^{\gamma_i},$$

and there are h elements in each sum. If $h = p$, then all pq δ_i are equal and it follows easily that a is a period of A. If $h < p$, then from

$$F_p(x) \Big| \sum_{i;\,\beta_i=0,\,\delta_i=k} \tau^{\gamma_i} x^{\alpha_i} - \sum_{i;\,\beta_i=m,\,\delta_i=k} \tau^{\gamma_i} x^{\alpha_i}$$

it can be shown, by methods already used, that b is a period of A.

Thus, if $\sum_{i=0}^{pq-1} \varrho^{\alpha_i}\sigma^{\beta_i}\tau^{\gamma_i} = 0$, then A is periodic. Similarly it can be shown that $\sum_{i=0}^{pq-1} \varrho^{\alpha_i}\sigma^{\beta_i}\omega^{\delta_i} = 0$ implies that A is periodic. So we may assume that $\sum_{i=0}^{rs-1} \varrho^{\lambda_i}\sigma^{\mu_i}\tau^{\nu_i} = 0$ and that $\sum_{i=0}^{rs-1} \varrho^{\lambda_i}\sigma^{\mu_i}\omega^{\varkappa_i} = 0$. From (12) it follows that $\sum_{i;\,\lambda_i=k} \sigma^{\mu_i}\tau^{\nu_i} = 0$ for $k = 0, 1, \ldots, p-1$. But from (11) λ_i occurs in blocks of s equal elements, say ms for some particular λ_i. Applying Theorem 2 of [2] (p. 374) it is easily seen on putting $x = 1$ that $ms = m'q + m''r, m' \geqq 0$, $m'' \geqq 0$. If $m = r$, then all $\lambda_i = 0$ and it follows easily that B is periodic. If $m < r$, then $m' \neq 0$ and summing over all λ_i we have $(\Sigma m)s = (\Sigma m')q + {}+ (\Sigma m'')r$, i. e. $rs = n'q + n''r$ with $n' > 0$, $n'' \geq 0$. It follows that $r | n'$ and so that $q < s$. Similarly it follows that B is periodic or that $p < r$.

If $\sum_{i=0}^{pq-1} \varrho^{\alpha_i}\tau^{\gamma_i}\omega^{\delta_i} = 0$, then from (6) and using an argument similar to that above A is periodic or $r < q$. If $\sum_{i=0}^{rs-1} \sigma^{\beta_i}\tau^{\gamma_i}\omega^{\delta_i} = 0$, then again A is periodic or $s < p$.

But we cannot have $s < p < r < q < s$. Therefore, if A is not periodic, $\sum_{i=0}^{rs-1} \varrho^{\lambda_i}\tau^{\nu_i}\omega^{\varkappa_i} = 0$ or $\sum_{i=0}^{rs-1} \sigma^{\mu_i}\tau^{\nu_i}\omega^{\varkappa_i} = 0$. From symmetry we may assume, without loss of generality, that $\sum_{i=0}^{pq-1} \varrho^{\lambda_i}\tau^{\nu_i}\omega^{\varkappa_i} = 0$. From (11) it follows that $\sum_{i;\,\nu_i=k} \varrho^{\lambda_i}\omega^{\varkappa_i} = 0$ for $k = 0, 1, \ldots, r-1$. But there are s elements in each sum. Therefore, in each sum, the numbers $\varkappa_i$ are $0, 1, \ldots, s-1$ and all λ_i are equal. But $\sum_{i=0}^{rs-1} \varrho^{\lambda_i}\sigma^{\mu_i}\tau^{\nu_i} = 0$. Therefore

$$\sum_{i;\,\nu_i=0} \varrho^{\lambda_i}\sigma^{\mu_i} = \sum_{i;\,\nu_i=1} \varrho^{\lambda_i}\sigma^{\mu_i} = \cdots = \sum_{i;\,\nu_i=r-1} \varrho^{\lambda_i}\sigma^{\mu_i}.$$

From the above all λ_i in each sum are equal. It follows that

$$\varrho^{\lambda'_0} \sum_{i;\,\nu_i=0} \sigma^{\mu_i} = \varrho^{\lambda'_1} \sum_{i;\,\nu_i=1} \sigma^{\mu_i} = \cdots = \Big(\sum_{i;\,\nu_i=r-1} \sigma^{\mu_i} \Big) \varrho'_{r-1}.$$

Since s does not divide q, $\sum_{i;\,\nu_i=k} \sigma^{\mu_i}$ is not equal to zero. It follows easily that $\lambda'_0 = \lambda'_1 = \cdots = \lambda'_{r-1}$, i. e. that all λ_i are equal.

It follows from $\sum_{i=0}^{rs-1} \varrho^{\lambda_i} \tau^{\nu_i} \omega^{\varkappa_i} = 0$ that B is periodic.

(ix) (6), (11), (12), (13) true.

From these we can deduce that B is periodic or that a set of relationships obtained at the end of (vi) hold. We have already seen that these imply A periodic. The other cases of three relationships from (10), (11), (12) and (13) holding true are similar to this.

(x) The case where all four of these relationships hold true is similar to (i).

This completes the proof.

The methods used in this paper can also be applied to non-cyclic groups and it is hoped in a further paper to show that in many of the unsolved cases given in [1] (p. 259) the groups of these types are good. We would just point out here that the group of type $(3^2, 3)$ is good. This follows immediately from Lemma 3.

§ 5. All factorisations of a good group

G. Hajós ([4], p. 161) gives a method which he claims will give all factorisations of a good group. Certainly, his method does give factorisations of the group, but he appears to have overlooked the fact that the subgroup H_n need not be a direct factor of G. For example, if one considers a cyclic group G of type (p^λ), where p is a prime and $\lambda \geqq 2$, then his method only leads to the trivial factorisation $G = (g)G$ where g is an element of G, since the only way in which G can be expressed as a product of subgroups is as $G = (e)G$.

However if, in his notation, instead of assuming that $H_1, H_2, \ldots, H_n$ are subgroups of G, we assume that $H_1, H_2, \ldots, H_n$ are subsets of G such that $H_k H_{k+1} \ldots H_n = K_k$ is a subgroup of G for $k = 1, 2, \ldots, n$ and that $K_1 = G$, then the formulae (3) of Hajós (with the obvious correction that the first dot in the expression for B should be a circle) do give all factorisations of a good group G.

The proof is as follows.

It is readily verified, by the method of HAJÓS, that $AB = H_1 H_2 \dots H_n = G$.

If G is a group of prime order, then the only factorisations of G are $G = (g)G$ where g is some element of G and these are the factorisations which arise from (3). Let us suppose that this result is true for good groups of order less than n. Let G be a good group of order n. Then by Theorem 4 of [1] (p. 263) every subgroup and so every quotient group of G is good. Let $AB = G$. Then either A or B, say B, is periodic. Let H be the set of all periods of B together with the identity element e. Then it is readily verified that H is a subgroup of G and that there exists a subset C such that $B = CH$. Then $G = AB = ACH$. Therefore the elements AC are a set of coset representatives for the quotient group of G by H, i. e.

$$(AH/H)\ (CH/H) = G/H.$$

But G/H is good and of smaller order than G. Therefore there exist subsets H_1H/H, $H_2H/H, \dots, H_{n-1}H/H$ such that $(H_kH/H)\dots(H_{n-1}H/H) = L_kH/H$ where L_kH/H is a subgroup of G/H for $k = 1, 2, \dots, n-1$ and $L_1H/H = G/H$, and

$$A\,H/H = (H/H)\,\dot{\circ}\,(H_1H/H)\,\underset{\cdot}{\circ}\,(H_2H/H)\,\dot{\circ}\cdots\cdot(H_{n+1}H/H),$$
$$C\,H/H = (H/H)\,\underset{\cdot}{\circ}\,(H_1H/H)\,\dot{\circ}\,(H_2H/H)\,\underset{\cdot}{\circ}\cdots\circ(H_{n-1}H/H).$$

The notation indicates the two possible alternative representations of AH/H and CH/H. It is easily seen that

$$A = (1\,\dot{\circ}\,H_1\,\underset{\cdot}{\circ}\,H_2\,\dot{\circ}\cdots\cdot H_{n-1})\circ H,$$

and

$$C = (1\,\underset{\cdot}{\circ}\,H_1\,\dot{\circ}\,H_2\,\underset{\cdot}{\circ}\cdots\circ H_{n-1})\circ H.$$

Therefore $B = ((1\,\underset{\cdot}{\circ}\,H_1\,\dot{\circ}\,H_2\,\underset{\cdot}{\circ}\cdots\circ H_{n-1})\circ H)\cdot H$.

Let $H = H_n$; then

$$A = 1\,\dot{\circ}\,H_1\,\underset{\cdot}{\circ}\,H_2\,\dot{\circ}\cdots\cdot H_{n-1}\circ H_n,$$
$$B = 1\,\underset{\cdot}{\circ}\,H_1\,\dot{\circ}\,H_2\,\underset{\cdot}{\circ}\cdots\circ H_{n-1}\cdot H_n,$$

and, further, $H_kH_{k+1}\cdots H_{n-1}H_n = L_kH_n = K_k$ is a subgroup of G and $K_1 = L_1H_n = G$.

These formulae also give us all factorisations of a cyclic group in which the number of elements in one factor is a power of a prime, as may be proved similarly, using Theorem 2. In order that the number of elements in A should be the power of a prime it is, of course, necessary that the number of elements of $H_1, H_3, \dots$ should be powers of the same prime where

$$A = 1\cdot H_1\circ H_2\cdot H_3\circ\cdots.$$

THE UNIVERSITY,
GLASGOW

(Received 17 July 1956)

References

[1] N. G. DE BRUIJN, On the factorisation of finite abelian groups, *Indag. Math. Kon. Ned. Akad. Wetensch. Amsterdam,* **15** (1953), pp. 258—264.

[2] N. G. DE BRUIJN, On the factorisation of cyclic groups, *Indag. Math. Kon. Ned. Akad. Wetensch. Amsterdam,* **15** (1953), pp. 370—377.

[3] N. G. DE BRUIJN, On bases for the set of integers, *Publ. Math. Debrecen,* **1** (1950), pp. 232—242.

[4] G. HAJÓS, Sur la factorisation des groupes abéliens, *Časopis Pěst. Mat. Fys.,* **74** (1949), pp. 157—162.

[5] L. RÉDEI, Ein Beitrag zum Problem der Faktorisation von endlichen Abelschen Gruppen, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.,* **1** (1950), pp. 197—207.

[6] L. RÉDEI, Zwei Lückensätze über Polynome in endlichen Primkörpern mit Anwendung auf die endlichen Abelschen Gruppen und die Gaussischen Summen, *Acta Math.,* **79** (1947) pp. 273—290.

A NOTE ON ENTIRE FUNCTIONS

By
T. KŐVÁRI (Budapest)
(*Presented by* A. RÉNYI)

Let $f(z)$ be an arbitrary entire function. We introduce the following notations:

$$M(r)=\max_{|z|=r}|f(z)|,$$

$$M'(r)=\frac{d}{dr}M(r),$$

$$M_1(r)=\max_{|z|=r}|f'(z)|.$$

It is well known,[1] that $M'(r)$ exists with the possible exception of a discrete sequence of points tending to ∞. Between $M'(r)$ and $M_1(r)$ the following inequality holds:[2]

$$M'(r)\leqq M_1(r). \tag{1}$$

This inequality follows at once from the following lemma, the simple proof[3] of which we omit:

LEMMA. Let z_0 be that point of the circle $|z|=r$ (if there exists more than one, one of these) in which $|f(z)|$ takes its maximal value. Then (supposing again that $M'(r)$ exists)

$$M'(r)=|f'(z_0)|.$$

The aim of this paper is to prove the following theorem:

THEOREM.[4] *If the entire function is of order* ϱ $(0<\varrho<\infty)$ *and type* σ

[1] See O. BLUMENTHAL, Sur le mode de croissance des fonctions entières, *Bull. Soc. Math. France*, **35** (1907), pp. 213—232.

[2] This, and the further inequalities containing $M'(r)$ have a meaning only for such values of r where $M'(r)$ exists.

[3] See e. g. W. K. HAYMAN, A characterization of the maximum modulus of functions regular at the origin, *Journal d'Analyse Math.*, 1 (1951), pp. 135—154 — although in a little different form.

[4] Inequality (3) is much stronger than the result of S. M. SHAH:

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\log\left(r\dfrac{M_1(r)}{M(r)}\right)}{\log r}=\varrho.$$

$(0<\sigma<\infty)$, *then*

$$1 \leqq \overline{\lim_{r=\infty}} \frac{M'(r)}{M(r)\sigma\varrho r^{\varrho-1}} \leqq e, \tag{2}$$

$$1 \leqq \overline{\lim_{r=\infty}} \frac{M_1(r)}{M(r)\sigma\varrho r^{\varrho-1}} \leqq e. \tag{3}$$

The lower and upper bounds in these inequalities can not be improved.

PROOF. 1. First we verify the inequalities on the left-hand side. By virtue of (1) it is sufficient to prove the inequality relating to $M'(r)$. Let us suppose that for $r>r_0$

$$\frac{M'(r)}{M(r)\sigma\varrho r^{\varrho-1}} \leqq 1-\varepsilon.$$

Then

$$\log M(r)-\log M(r_0)=\int_{r_0}^{r}\frac{M'(r)}{M(r)}\,dr \leqq (1-\varepsilon)\varrho\sigma\int_{r_0}^{r} r^{\varrho-1}\,dr=(1-\varepsilon)\sigma(r^\varrho-r_0^\varrho),$$

$$\frac{\log M(r)}{r^\varrho} \leqq \frac{\log M(r_0)}{r^\varrho}+(1-\varepsilon)\sigma\left(1-\frac{r_0^\varrho}{r^\varrho}\right).$$

Hence

$$\overline{\lim_{r=\infty}}\frac{\log M(r)}{r^\varrho} \leqq (1-\varepsilon)\sigma$$

which is inconsistent with the fact that $f(z)$ is of order ϱ and type σ.

2. Concerning the inequalities on the right-hand side, by virtue of (1) it is sufficient to prove the inequality relating to $M_1(r)$. However, this follows immediately from a result of S. BERNSTEIN,[5] which asserts that

$$M_1(r) \leqq e(\varrho\sigma+\varepsilon)r^{\varrho-1}M(r) \quad \text{if} \quad r>r_0. \tag{4}$$

3. To show that the lower bound in the inequalities (2) and (3) can not be increased, it is sufficient to consider the function $f(z)=e^{\sigma z^\varrho}$. Indeed, for this function

$$\frac{M_1(r)}{M(r)\sigma\varrho r^{\varrho-1}}=\frac{M'(r)}{M(r)\sigma\varrho r^{\varrho-1}}=1.$$

4. It remains to verify that the upper bound in the inequalities (2) and (3) can not be decreased. For this purpose we construct a function with the following property:

$$\overline{\lim_{r=\infty}}\frac{M_1(r)}{M(r)\sigma\varrho r^{\varrho-1}}=\overline{\lim_{r=\infty}}\frac{M'(r)}{M(r)\sigma\varrho r^{\varrho-1}}=e.$$

[5] S. BERNSTEIN, *Leçons sur les propriétés extrémales et la meilleure approximation des fonctions analytiques d'une variable réelle* (Paris, 1926).

We define the sequences τ_n, a_n and b_n as follows:

$$\tau_n = \left(\frac{n!}{\varrho\sigma e}\right)^{\frac{1}{\varrho}}, \qquad a_n = \tau_n^{n!-(n-1)!}, \qquad b_n = \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_n}.$$

After this, we define the function $f(z)$ by means of the series

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n!}}{a_1 a_2 \cdots a_n}. \tag{5}$$

$f(z)$ is an entire function of order ϱ and type σ, as the following simple calculation shows:

$$\lim_{n=\infty} n!^{\frac{1}{\varrho}} \sqrt[n!]{b_n} = \lim_{n=\infty} \left\{ n! \left[\prod_{\nu=1}^{n} \left(\frac{\sigma\varrho e}{\nu!}\right)^{\nu!-(\nu-1)!} \right]^{\frac{1}{n!}} \right\}^{\frac{1}{\varrho}} = (\sigma\varrho e)^{\frac{1}{\varrho}}.$$

Put $r_n = \tau_n e^{\frac{1}{n}}$. Since for $m < n$

$$\frac{b_m r_n^{m!}}{b_n r_n^{n!}} = a_{m+1} \cdots a_n r_n^{-n!+m!} = \left(\frac{\tau_{m+1}}{r_n}\right)^{(m+1)!-m!} \left(\frac{\tau_{m+2}}{r_n}\right)^{(m+2)!-(m+1)!} \cdots \left(\frac{\tau_n}{r_n}\right)^{n!-(n-1)!} \leqq$$

$$\leqq \left(\frac{\tau_n}{r_n}\right)^{n!-(n-1)!} = e^{-\frac{1}{n}(n-1)(n-1)!} < \frac{1}{2n} 2^{-n} \quad \text{if} \quad n \geqq 5,$$

and for $m > n$

$$\frac{b_m r_n^{m!}}{b_n r_n^{n!}} = \frac{1}{a_{n+1} \cdots a_m} r_n^{m!-n!} = \left(\frac{r_n}{\tau_{n+1}}\right)^{(n+1)!-n!} \left(\frac{r_n}{\tau_{n+2}}\right)^{(n+2)!-(n+1)!} \cdots \left(\frac{r_n}{\tau_m}\right)^{m!-(n-1)!} \leqq$$

$$\leqq \left(\frac{r_n}{\tau_{n+1}}\right)^{m!-n!} = \left(\frac{\tau_n}{\tau_{n+1}} e^{\frac{1}{n}}\right)^{m!-n!} = \left[\left(\frac{1}{n+1}\right)^{\varrho} e^{\frac{1}{n}}\right]^{m!-n!} \leqq \left(\frac{1}{2}\right)^{m!-n!};$$

we have

$$\frac{\sum_{m \neq n} b_m r_n^{m!}}{b_n r_n^{n!}} \leqq 2^{-n-1} + \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{m!-n!}} < 2^{-n},$$

$$\frac{\sum_{m \neq n} m! b_m r_n^{m!-1}}{n! b_n r_n^{n!-1}} \leqq 2^{-n-1} + \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{m!}{2^{m!}} \frac{2^{n!}}{n!} \leqq 2^{-n}.$$

Hence, taking also our lemma into consideration,

$$M(r_n) \leqq (1 + 2^{-n}) b_n r_n^{n!}, \tag{6}$$

$$M_1(r_n) \geqq (1 - 2^{-n}) n! b_n r_n^{n!-1}, \tag{7}$$

$$M'(r_n) = |f'(r_n e^{i\varphi_n})| \geqq (1 - 2^{-n}) n! b_n r_n^{n!-1}. \tag{8}$$

From (6) and (7) we have

$$\frac{M_1(r_n)}{M(r_n)\varrho\sigma r_n^{\varrho-1}} \geqq \frac{1-2^{-n}}{1+2^{-n}} \cdot \frac{n!}{r_n} \cdot \frac{1}{\varrho\sigma r_n^{\varrho-1}} = \frac{1-2^{-n}}{1+2^{-n}} \frac{1}{\varrho\sigma} e^{-\frac{\varrho}{n}} \frac{n!}{\tau_n^{\varrho}} = \left(\frac{1-2^{-n}}{1+2^{-n}} e^{-\frac{\varrho}{n}}\right) e,$$

hence

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{M_1(r)}{M(r)\varrho\sigma r^{\varrho-1}} \geqq e, \tag{9}$$

and similarly, using (8),

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{M'(r)}{M(r)\varrho\sigma r^{\varrho-1}} \geqq e. \tag{10}$$

Owing to (2) and (3), respectively, only the equality can hold in (9) and (10). Thus we have proved our theorem completely.

We mention that the above counter example is the special case of the following general result, the proof[6] of which we omit here:

If

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{\lambda_n}$$

is a function of order ϱ $(0<\varrho<\infty)$ and type σ $(0<\sigma<\infty)$ and the gap condition

$$\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \to \infty \tag{11}$$

is satisfied, then

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{M'(r)}{M(r)\varrho\sigma r^{\varrho-1}} = \overline{\lim_{r=\infty}} \frac{M_1(r)}{M(r)\varrho\sigma r^{\varrho-1}} = e. \tag{12}$$

This theorem shows that for lacunary power series (with the gap condition (11)) the inequalities (2) and (3) can be replaced by the equality (12).

(Received 5 September 1956)

[6] See the dissertation of the author, *„Egészfüggvények maximum-modulus függvényével kapcsolatos vizsgálatok“* (Library of the Hungarian Academy of Sciences).

PROBABILISTIC PROOF OF A THEOREM ON THE APPROXIMATION OF CONTINUOUS FUNCTIONS BY MEANS OF GENERALIZED BERNSTEIN POLYNOMIALS

By

M. ARATÓ (Budapest) and A. RÉNYI (Budapest), member of the Academy

Introduction

The nowadays classical proof of the theorem of WEIERSTRASS given by S. BERNSTEIN [1] is — as it is well known — essentially a probabilistic proof; it is based on a simple application of the inequality of CHEBYSHEV to the binomial distribution. Applications of the same idea to other problems of analysis are also known. For instance, L. DAHLGREN [2] has given a proof — following a suggestion of M. RIESZ — by the same method, applied to the Poisson distribution, for a theorem of E. HILLE. The second named author has shown ([3], p. 435) that the application of the same idea to the gamma distribution leads to a very simple proof of the well-known inversion theorem of L. POST and D. V. WIDDER for Laplace transforms. The series of these examples could be continued.

The present paper contains a probabilistic proof, following essentially the same method as those mentioned above, of an approximation theorem due to I. J. HIRSCHMAN and D. V. WIDDER ([4], [5]), and to A. O. GELFOND ([6], [7]). Before formulating this theorem, we introduce some notations. Let us denote by $f*g$ the convolution of the real functions $f(x)$ and $g(x)$, defined for $x \geqq 0$, that is put

$$f*g=\int_0^x f(t)\,g(x-t)\,dt.$$

Let us consider a sequence a_k $(k=1,2,\ldots)$ of positive numbers, and put

$$g_0(x)\equiv 1 \quad \text{and} \quad g_k(x)=a_k e^{-a_k x} \quad \text{for} \quad x\geqq 0, \tag{1}$$

further

$$H_{n,0}(x)=g_0*g_1*\cdots*g_n \quad \text{and} \quad H_{n,k}(x)=\frac{1}{a_k}g_k*g_{k+1}*\cdots*g_n \tag{2}$$

for $k=1,2,\ldots,n$.

The theorem of HIRSCHMAN—WIDDER—GELFOND asserts that if

a) a_k is non decreasing[1] and tending to $+\infty$,

b) the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ is divergent,

and if $f(x)$ is continuous in the interval $0 \leqq x \leqq +\infty$ (i. e. $f(x)$ is continuous in any interval $0 \leqq x \leqq A$ $(A > 0)$, further $\lim_{x\to\infty} f(x)$ exists and is finite), then putting[2]

$$B_n[f(x)] = \sum_{k=0}^{n} f\left(\sum_{i=k+1}^{n} \frac{1}{a_i}\right) H_{n,k}(x), \tag{3}$$

the *generalized Bernstein polynomials* $B_n[f(x)]$ converge uniformly to $f(x)$ on the whole semi-axis $0 \leqq x \leqq +\infty$.

A part of the proof, given in [5], of the above theorem has been somewhat simplified by ŁUSZCZKI, MIKUSINSKI, URBANIK, WLOKA, ZIELEZNY [8], but nevertheless it is not very simple. It is quite natural to try to find a probabilistic proof of this theorem, as it is a generalization of BERNSTEIN's original theorem. As a matter of fact, if we consider the particular sequence $a_k = k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ and introduce the new variable $t = e^{-x}$, then we obtain

$$H_{n,k}(x) = \binom{n}{k} e^{-kx}(1-e^{-x})^{n-k} = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}, \tag{4}$$

and replacing $\sum_{i=k+1}^{n} \frac{1}{i}$ by $\log \frac{n}{k}$ (these two expressions being asymptotically equal if n and k are both large) and putting $g(t) = f\left(\log \frac{1}{t}\right)$, we obtain the Bernstein polynomials

$$B_n[g(t)] = \sum_{k=0}^{n} g\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}. \tag{5}$$

In § 1 we first prove a general theorem of probability theory. In § 2 this is applied to deduce a simple proof of the above-mentioned theorem of HIRSCHMAN—WIDDER—GELFOND. We do not need the supposition that a_k is non-decreasing. GELFOND (see [7]) has also given an estimate of the remainder term. In the present paper we do not consider this question.

[1] HIRSCHMAN and WIDDER suppose that a_k is strictly increasing, but this is not necessary.

[2] GELFOND considers instead of (3)

$$B_n^*(f(x)) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\sum_{n=k+1}^{n} \log \frac{1}{1-\frac{1}{a_i}}\right) H_{n,k}(x). \tag{3'}$$

In (3) as well as in (3′) the empty sum (for $k = n$) means 0.

§ 1. A theorem of probability theory

THEOREM 1. *Let $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ be a sequence of independent non-negative random variables with finite positive mean values* $\mathbf{M}(\xi_n)$ *and finite positive variances* $\mathbf{D}^2(\xi_n)$. *We suppose that*

1. $\lim\limits_{k\to\infty} \mathbf{M}(\xi_k) = 0,$

2. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathbf{M}(\xi_k) = +\infty,$

3. $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\mathbf{D}^2(\xi_k)}{\mathbf{M}(\xi_k)} = 0.$

It follows that if $p_{n,0}(x) = \mathbf{P}(\xi_n + \cdots + \xi_1 < x)$, $p_{n,n}(x) = \mathbf{P}(\xi_n \geq x)$ *and*

$$p_{n,k}(x) = \mathbf{P}(\xi_n + \cdots + \xi_{k+1} < x \leq \xi_n + \cdots + \xi_k) \tag{1.1}$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n-1;\; n = 1, 2, \ldots),$$

then, putting

$$B_n[f(x)] = \sum_{k=0}^{n} f\left(\sum_{j=k+1}^{n} \mathbf{M}(\xi_j)\right) p_{n,k}(x), \tag{1.2}$$

we have $\lim\limits_{n\to\infty} B_n[f(x)] = f(x)$ *uniformly in* x *for* $0 \leq x \leq +\infty$ *for any function* $f(x)$ *which is continuous in the interval* $[0, +\infty]$.

PROOF OF THEOREM 1. Let us put for the sake of brevity $m_k = \mathbf{M}(\xi_k)$, $b_k = \mathbf{D}^2(\xi_k)$ and $g_k = \dfrac{\mathbf{D}^2(\xi_k)}{\mathbf{M}(\xi_k)} = \dfrac{b_k}{m_k}$. We have evidently

$$\sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(x) \equiv 1. \tag{1.3}$$

For an arbitrary $\varepsilon > 0$ there can be found positive numbers $\delta > 0$ and $A > 0$ so that $|f(x_1) - f(x_2)| \leq \varepsilon$ if $|x_1 - x_2| < \delta$, further $|f(x) - f(+\infty)| < \varepsilon$ if $x \geq A$. Let us put $\max\limits_{0 \leq x \leq +\infty} |f(x)| = M$. It follows that

$$|B_n[f(x)] - f(x)| \leq \varepsilon \sum_{\left|\sum\limits_{k+1}^{n} m_j - x\right| < \delta} p_{n,k}(x) + 2M \sum_{\left|\sum\limits_{k+1}^{n} m_j - x\right| \geq \delta} p_{n,k}(x). \tag{1.4}$$

Now

$$\sum_{\left|\sum\limits_{k+1}^{n} m_j - x\right| \geq \delta} p_{n,k}(x) = \mathbf{P}(\xi_n + \cdots + \xi_{k_1 - 1} < x) + \mathbf{P}(x \leq \xi_n + \cdots + \xi_{k_2}) \tag{1.5}$$

where k_1 is the greatest value of k for which $\sum\limits_{k+1}^{n} m_j - x \geq \delta$ and k_2 the least

value of k for which $\sum_{k+1}^{n} m_j - x \leqq -\delta$. Clearly we have

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}(\xi_n + \cdots + \xi_{k_1+1} < x) &= \mathbf{P}\left(\xi_n + \cdots + \xi_{k_1+1} - \sum_{k_1+1}^{n} m_j < x - \sum_{k_1+1}^{n} m_j\right) \leqq \\
&\leqq \mathbf{P}\left(\xi_n + \cdots + \xi_{k_1+1} - \sum_{k_1+1}^{n} m_j < -\delta\right)
\end{aligned} \tag{1.6}
$$

and

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}(x \leqq \xi_n + \cdots + \xi_{k_2}) &= \mathbf{P}\left(\xi_n + \cdots + \xi_{k_2} - \sum_{k_2}^{n} m_j \geqq x - \sum_{k_2}^{n} m_j\right) \leqq \\
&\leqq \mathbf{P}\left(\xi_n + \cdots + \xi_{k_2} - \sum_{k_2}^{n} m_j \geqq \delta - m_{k_2}\right).
\end{aligned} \tag{1.7}
$$

As by supposition $\sum_{j=1}^{\infty} m_j$ diverges and $m_j \to 0$, we have $k_2 \to \infty$ for $n \to \infty$; thus if $n \geqq n_1(\varepsilon)$, we have $m_{k_2} < \delta/2$ uniformly for $x \leqq A + \delta$. It follows from (1.7) that

$$
\mathbf{P}(x \leqq \xi_n + \cdots + \xi_{k_2}) \leqq \mathbf{P}\left(\xi_n + \cdots + \xi_{k_2} - \sum_{k_2}^{n} m_j \geqq \delta/2\right). \tag{1.8}
$$

Applying the inequality of Chebyshev to the probabilities on the right of (1.6) and (1.8) it follows from (1.5) that

$$
\sum_{\left|\sum_{k+1}^{n} m_j - x\right| \geqq \delta} p_{n,k}(x) \leqq 4\left(\frac{\sum_{k_1+1}^{n} b_j + \sum_{k_2}^{n} b_j}{\delta^2}\right) \quad \text{for} \quad n \geqq n_1 \quad \text{and} \quad x \leqq A + \delta. \tag{1.9}
$$

As $\sum_{k_1+2}^{n} m_j < x + \delta$, it follows that $k_1 \to \infty$ if $n \to \infty$ uniformly for $x \leqq A + \delta$. Now by supposition $b_j = q_j m_j$ where $q_j \to 0$ for $j \to \infty$; we may choose n_2 so large that if $n \geqq n_2$, $q_j < \frac{\varepsilon\delta^2}{A+\delta}$ for $j \geqq \min(k_1, k_2)$ and $m_{k_1+1} < A$, $m_{k_2} < A$; thus we obtain

$$
\begin{aligned}
\sum_{\left|\sum_{k+1}^{n} m_j - x\right| \geqq \delta} p_{n,k}(x) &\leqq \frac{4\varepsilon}{A+\delta}\left(\sum_{k_1+1}^{n} m_j + \sum_{k_2}^{n} m_j\right) \leqq \\
&\leqq \frac{4\varepsilon}{A+\delta}(2x + m_{k_1+1} + m_{k_2}) < 16\varepsilon
\end{aligned} \tag{1.10}
$$

for $n \geqq n_3$ and $x \leqq A + \delta$.

It follows from (1.4) and (1.10) that

$$|B_n[f(x)]-f(x)| \leqq \varepsilon(1+32M) \tag{1.11}$$

uniformly for $0 \leqq x \leqq A+\delta$ if $n \geqq n_3$ where n_3 depends only on ε.

Now let us consider the case $x \geqq A+\delta$. Let us choose n so large that $\sum_1^n m_j > A+\delta$ and let k_3 denote the least value of k for which $\sum_{k+1}^n m_j \leqq A$. Clearly $k_3 \to \infty$ if $n \to \infty$. In this case we have evidently

$$B_n[f(x)]-f(x) \leqq 2\varepsilon \sum_{\sum\limits_{k+1}^{n} m_j > A} p_{n,k}(x) + 2M \sum_{\sum\limits_{k+1}^{n} m_j \leqq A} p_{n,k}(x). \tag{1.12}$$

As

$$\sum_{\sum\limits_{k+1}^{n} m_j \leqq A} p_{n,k}(x) = \mathbf{P}(\xi_n+\cdots+\xi_{k_3} \geqq x) \leqq \mathbf{P}\left(\xi_n+\cdots+\xi_{k_3}-\sum_{k_3}^{n} m_j \geqq \delta - m_{k_3}\right) \leqq$$

$$\leqq \mathbf{P}\left(\xi_n+\cdots+\xi_{k_3}-\sum_{k_3}^{n} m_j \geqq \delta/2\right), \tag{1.13}$$

provided that n is so large that $m_{k_3} < \delta/2$ and as by Chebyshev's inequality

$$\mathbf{P}\left(\xi_n+\cdots+\xi_{k_3}-\sum_{k_3}^{n} m_j \geqq \delta/2\right) \leqq \frac{4}{\delta^2}\sum_{k_3}^{n} b_k, \tag{1.14}$$

we obtain similarly as above, if n is so large that $q_j \leqq \frac{\delta^2 \varepsilon}{A}$ for $j \geqq k_3$, taking (1.12), (1.13) and (1.14) into account, further in view of $\sum_{k_3}^{n} b_j < \frac{\delta^2\varepsilon}{A}\left(\sum_{k_3}^{n} m_j\right) < \frac{\delta^2\varepsilon}{A}(A+m_{k_3})$ and $m_{k_3} < A$ if n is sufficiently large, that

$$|B_n[f(x)]-f(x)| \leqq 2\varepsilon(1+8M), \tag{1.15}$$

provided that $n \geqq n_4$ where n_4 depends only on ε. Thus, comparing (1.11) with (1.15), it follows that

$$|B_n[f(x)]-f(x)| \leqq 2\varepsilon(1+16M) \tag{1.16}$$

uniformly for $0 \leqq x \leqq +\infty$ if $n \geqq n_5$ where n_5 depends only on ε. This proves our theorem.

§ 2. Approximation of continuous functions by generalized Bernstein polynomials

Now let us apply the theorem proved in § 1 to the case when the distribution of the random variables ξ_k is exponential. Let us suppose that the density function of ξ_k is $a_k e^{-a_k x}$ for $x \geqq 0$ and 0 for $x < 0$, where $a_k > 0$, and that the positive numbers a_k satisfy the following two conditions:

1. $\lim\limits_{k \to \infty} a_k = +\infty$,

2. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k}$ is divergent.

In this case $\mathbf{M}(\xi_k) = \frac{1}{a_k}$, $\mathbf{D}^2(\xi_k) = \frac{1}{a_k^2}$, thus all the conditions of Theorem 1 are satisfied. We shall show that in this special case

$$p_{n,k}(x) = H_{n,k}(x) \tag{2. 1}$$

where the functions $H_{n,k}(x)$ are the generalized Bernstein polynomials defined in the Introduction. Let us denote by $g_{n,k}(x)$ the density function of the sum $\xi_n + \xi_{n-1} + \cdots + \xi_k$, i. e. we put $g_{n,k}(x) = g_k * g_{k+1} * \cdots * g_n$. Clearly we have

$$p_{n,n}(x) = \mathbf{P}(x \leqq \xi_n) = \int_x^{\infty} g_n(t)\,dt = \frac{1}{a_n} g_n(x) = H_{n,n}(x).$$

Now let us suppose $1 \leqq k \leqq n-1$. We have clearly

$$\mathbf{P}(\xi_n + \cdots + \xi_{k+1} < x \leqq \xi_n + \cdots + \xi_k) = \mathbf{P}(\xi_n + \cdots + \xi_{k+1} < x) -$$
$$- \mathbf{P}(\xi_n + \cdots + \xi_k < x)$$

and therefore

$$p_{n,k}(x) = \frac{d}{dx} \mathbf{P}(\xi_n + \cdots + \xi_{k+1} < x \leqq \xi_n + \cdots + \xi_k) = g_{n,k+1}(x) - g_{n,k}(x).$$

As

$$g_{n,k}(x) = \int_0^x a_k e^{-a_k(x-t)} g_{n,k+1}(t)\,dt,$$

we have

$$g'_{n,k}(x) = a_k[g_{n,k+1}(x) - g_{n,k}(x)],$$

thus it follows that

$$p_{n,k}(x) = \frac{1}{a_k} g_{n,k}(x) + p_{n,k}(0).$$

But $p_{n,k}(0)=0$ for $1\leqq k\leqq n-1$ and thus

$$p_{n,k}(x)=\frac{1}{a_k}g_{n,k}(x)=H_{n,k}(x) \quad \text{for} \quad 1\leqq k\leqq n$$

too. If $k=0$, we have

$$p'_{n,0}(x)=\frac{d}{dx}\mathbf{P}(\xi_n+\cdots+\xi_1\leqq x)=g_{n,1}(x),$$

and thus

$$p_{n,0}(x)=\int_0^x g_{n,1}(t)dt=1*g_{n,1}=H_{n,0}(x).$$

Thus (2. 1) is completely proved.

Consequently it follows from Theorem 1 that, using the notations of the Introduction,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} f\left(\sum_{i=k+1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)H_{n,k}(x)=f(x) \tag{2. 2}$$

uniformly in x for $0\leqq x\leqq+\infty$. Note that regarding the sequence a_n we supposed only that $a_n>0$, $a_n\to\infty$ and that $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ is divergent, but did not suppose that a_n is non-decreasing.

Let us mention, finally, that the identity

$$\sum_{k=0}^{n}H_{n,k}(x)\equiv 1 \qquad (n=1,2,\ldots), \tag{2. 3}$$

which plays a part in all known proofs of the theorem of HIRSCHMAN—WIDDER—GELFOND,[3] is an immediate consequence of (2. 1) and the probabilistic meaning of $p_{n,k}(x)$.

MATHEMATICAL INSTITUTE
OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

(Received 10 September 1956)

[3] The paper [8] is devoted to the proof of (2. 3) and of another identity.

Bibliography

[1] S. Bernstein, Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités, Сообщ. Харьк. Матем. Общества, **13** (1912), pp. 1—2.

[2] L. Dahlgren, A theorem on translations by Hille, and its interpretation from the point of view of the theory of probability, *Skand. Aktuarietidskr.*, **33** (1950), pp. 184—192.

[3] A. Rényi, *Valószínűségszámítás* (Budapest, 1954).

[4] I. J. Hirschman and D. V. Widder, Generalised Bernstein polynomials, *Duke Math. Journ.*, **16** (1949), pp. 433—438.

[5] I. J. Hirschman and D. V. Widder, *The convolution transform* (Princeton, 1955), pp. 240—246.

[6] А. О. Гельфонд, Об обобщенных полиномах С. Н. Бернштейна, Изв. Акад. Наук СССР, **14** (1950), pp. 413—420.

[7] А. О. Гельфонд, Исчисление конечных разностей (Москва—Ленинград, 1952), pp. 111—117.

[8] Z. Łuszczki, I. Mikusinski, K. Urbanik, I. Wloka, Z. Zielezny, Einige Bemerkungen über die Hirschman—Widderschen Funktionen, *Colloquium Mathematicum*, **4** (1956), pp. 30—32.

BEMERKUNGEN ZUR DARSTELLUNG DER EBENEN HYPERBOLISCHEN GEOMETRIE IM EBENEN EUKLIDISCHEN HYPERBOLISCHEN KREISBÜNDEL

Von

KUNO FLADT (Calw, Deutschland)

(*Vorgelegt von* G. HAJÓS)

Mehrere Autoren, wir nennen J. HJELMSLEV,[1] HOWARD EVES und V. E. HOGGATT,[2] und PAUL SZÁSZ,[3] haben sich in neuerer Zeit mit der bekannten Darstellung von H. POINCARÉ[4] der ebenen hyperbolischen Geometrie im ebenen hyperbolischen Kreisbündel der euklidischen Geometrie beschäftigt. Überall wird dabei von der Definition einer „Pseudostrecke" oder *Scheinstrecke* durch den Logarithmus eines Doppelverhältnisses ausgegangen. Eine wirklich „elementare" Begründung erfordert aber eine Motivierung dieser Definition. Im folgenden wird eine solche gegeben, im Anschluß daran das Grundproblem der hyperbolischen Geometrie, die Abhängigkeit zwischen Parallelwinkel und Paralleldistanz zu bestimmen, gelöst und damit auch die hyperbolische Trigonometrie aufs neue begründet.

§ 1

Wir setzen die ebene euklidische Geometrie als auf die Hilbertschen Axiome gegründet voraus und verstehen unter einem *hyperbolischen Kreisbündel* in bekannter Weise die Gesamtheit der Kreise bzw. Geraden, die einen festen Kreis (O, t) mit Mittelpunkt O und Halbmesser t rechtwinklig schneiden. Nun seien die Punkte innerhalb (O, t) die „Punkte" einer ebenen hyperbolischen Geometrie, ihre „Geraden", die wir *Scheingeraden* nennen,

[1] J. HJELMSLEV, *Grundlag for den projektive Geometri* (Kobenhavn, 1943), § 8, S. 38—41.

[2] HOWARD EVES and V. E. HOGGATT, Hyperbolic trigonometry derived from the Poincaré model, *The American Mathematical Monthly*, **58** (1951), S. 469—474.

[3] PAUL SZÁSZ, Über die Trigonometrie des Poincaréschen Kreismodells der hyperbolischen ebenen Geometrie, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **5** (1954), S. 29—34; ferner Hyperbolische Trigonometrie an dem Poincaréschen Kreismodell abgelesen, *ebenda*, **7** (1956), S. 65—69, und ausführlicher A hiperbolikus trigonometria leolvasása a Poincaré-féle körmodellről (ungarisch), *MTA Mat. és Fiz. O. Közleményei*, **6** (1956), S. 73—80.

[4] H. POINCARÉ, Théorie des groupes fuchsiens, *Acta Mathematica*, **1** (1882), S. 1—62, besonders § 2, S. 6—8, und § 12, S. 56—61; Mémoire sur les fonctions fuchsiennes, *ebenda*, S. 193—294, besonders S. 201—202; Mémoire sur les groupes kleinéens, *ebenda*, **3** (1883), S. 49—92, besonders S. 55—56.

die Kreise des Bündels, soweit sie innerhalb (O, t) verlaufen, die Geraden durch O als ausgeartete Bündelkreise angesehen. Dann bestimmen zwei Punkte P und Q eine Scheingerade (P, Q) und eine *Scheinstrecke* $\langle P, Q \rangle$, nämlich die Punkte des innerhalb (O, t) gelegenen Kreisbogens zwischen P und Q. Die Winkel zweier sich schneidender Scheingeraden seien die euklidischen Winkel der sie darstellenden Kreise. Dann gilt das hyperbolische Parallelenaxiom, wobei die *Parallelen* l_1 und l_2 durch den Punkt P zur Scheingeraden

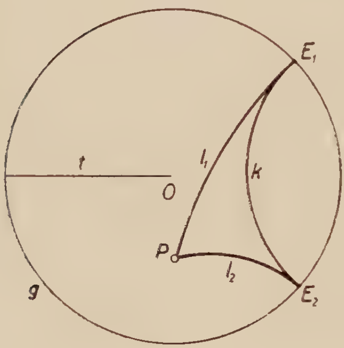

Fig. 1

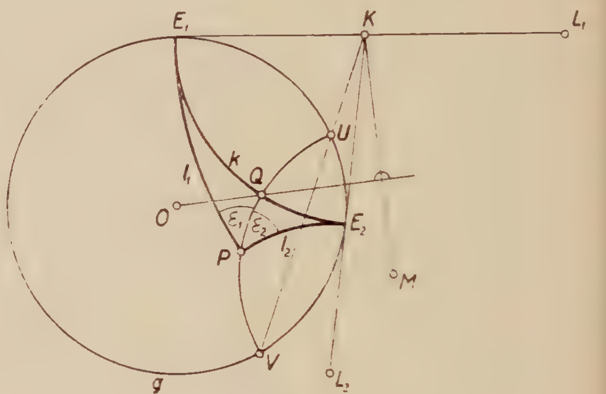

Fig. 2

k, die (O, t) in den *Enden* E_1 und E_2 schneidet (Fig. 1), diejenigen Bündelkreise durch P sind, welche (O, t) in E_1 und E_2 rechtwinklig schneiden, also den k darstellenden Bündelkreis in E_1 und E_2 berühren.

In Fig. 2 ist die Scheingerade (P, Q) der Bündelkreis $(M, \overline{MQ})$ durch P und Q, der den Grundkreis g in U und V schneidet, und die Bezeichnung ist so gewählt, daß der Punkt Q auf dem Bogen $\widehat{UV}$ zwischen P und U liegt. Man errichte in Q auf (PQ) das Scheinlot k, d. h. man zeichne den Kreis (K, KQ), dessen Mittelpunkt K der Schnittpunkt der Geraden UV mit dem Lot von M auf OQ ist. Nun ziehe man durch P die *Scheinparallelen* l_1 und l_2, (PE_1) und (PE_2), zu dem Scheinlot k (Kreismittelpunkte L_1 und L_2). Diese bilden mit (PQ) die *Parallelwinkel* $QPE_1 = \varepsilon_1$ und $QPE_2 = \varepsilon_2$. Wir zeigen nun, daß $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ ist und daß ε in ganz bestimmter Weise von der Lage von P, Q abhängt.

Wir üben wie J. Hjelmslev[5] auf Fig. 2 eine Inversion mit Zentrum E_1 aus. Dadurch verwandeln sich die Kreise $(K, \overline{KE_1})$ und $(L_1, \overline{L_1E_1})$ in zwei Parallelen k' und l'_1, der Grundkreis g in eine Senkrechte g' auf k' und l'_1, der Bündelkreis durch P und Q in einen Kreis, der senkrecht auf k' und g'

[5] J. Hjelmslev, loc. cit. [1], besonders S. 39.

steht, d. h. seinen Mittelpunkt im Schnittpunkt N' von k' und g' hat, g' schneidet diesen Kreis in U' und V' (Fig. 3). Zieht man in P' die Kreistangente t', so ist, da bei der Inversion die Winkel dem Betrage nach erhalten bleiben, $\sphericalangle(t', l_1') = \varepsilon_1 = \sphericalangle P'N'V'$. Zieht man $U'P'$, so ist $\sphericalangle P'U'V' = \frac{\varepsilon_1}{2}$, also

$$\operatorname{ctg}\frac{\varepsilon_1}{2} = \frac{\overline{P'U'}}{\overline{P'V'}} = \frac{\overline{P'U'}}{\overline{P'V'}} : \frac{\overline{Q'U'}}{\overline{Q'V'}}.$$

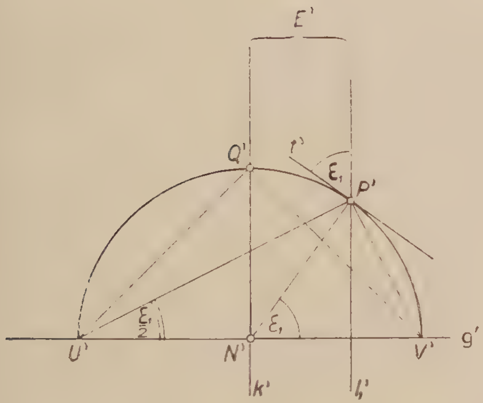

Fig. 3

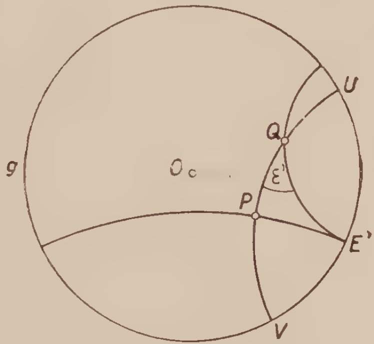

Fig. 4

Da aber bei einer Inversion das Doppelverhältnis (DV) von vier Punkten eines Kreises, ausgedrückt als DV der entsprechenden Sehnen, invariant ist, so ist auch

$$\operatorname{ctg}\frac{\varepsilon_1}{2} = \frac{\overline{PU}}{\overline{PV}} : \frac{\overline{QU}}{\overline{QV}}.$$

Vom Punkt E_2 ausgehend hätte man für $\operatorname{ctg}\frac{\varepsilon_2}{2}$ denselben Wert erhalten. Es ist also $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 = \varepsilon$. Hätte man aber in P das Scheinlot auf (PQ) errichtet und durch Q eine Scheinparallele QE' gezogen (Fig. 4), so hätte man den Parallelwinkel $PQE' = \varepsilon'$ erhalten, der nach der obigen Regel aus

$$\operatorname{ctg}\frac{\varepsilon'}{2} = \frac{\overline{QV}}{\overline{QU}} : \frac{\overline{PV}}{\overline{PU}} = \operatorname{ctg}\frac{\varepsilon}{2}$$

zu berechnen ist. Es it daher $\varepsilon' = \varepsilon$. Wir haben so den

SATZ. *Zwei Punkte P und Q bestimmen sowohl in P als in Q einen einzigen Parallelwinkel ε, dessen Größe allein von dem Wert des Doppel-*

verhältnisses der Punkte P und Q mit den Enden U und V ihrer Scheingeraden abhängt:

$$\operatorname{ctg}\frac{\varepsilon}{2}=\frac{\overline{PU}}{\overline{PV}}:\frac{\overline{QU}}{\overline{QV}}. \tag{I}$$

Wir nennen ε den zur *Paralleldistanz* $\langle PQ\rangle$ gehörigen *Parallelwinkel.*

§ 2

Was ist aber diese Paralleldistanz? Als einmaliges Individuum ist sie die Gesamtheit der Punkte des Kreisbogens zwischen P und Q. Aber wann sollen zwei Paralleldistanzen und damit zwei Scheinstrecken *kongruent* oder *gleich* heißen? Die Antwort gibt die

DEFINITION 1. *Zwei Scheinstrecken heißen „kongruent“ oder „gleich“, wenn zu ihnen derselbe Parallelwinkel gehört.*

Infolge (I) in § 1 ist diese Definition gleichbedeutend mit der folgenden

DEFINITION 2. *Zwei Scheinstrecken heißen „kongruent“ oder „gleich“, wenn zu ihnen dasselbe Doppelverhältnis gehört.* Zur Scheinstrecke $\langle PQ\rangle$ gehört hierbei nach dem Obigen das DV

$$\Delta=\frac{\overline{PU}}{\overline{PV}}:\frac{\overline{QU}}{\overline{QV}}, \tag{1}$$

wobei U, V die Schnittpunkte von g und des durch P und Q gelegten Bündelkreises sind, so bezeichnet, daß Q auf dem Bogen $\widehat{UV}$ zwischen P und U liegt (Fig. 4).

Man überzeugt sich leicht, daß in der durch diese und durch die obigen Festsetzungen erklärten *Scheingeometrie* alle Postulate der hyperbolischen ebenen Geometrie erfüllt sind. Damit ist auf Grund der üblichen Forderungen des Messens, nach beliebiger Wahl der *Scheinlängeneinheit*, die *Maßzahl einer Scheinstrecke* $\langle PQ\rangle$ bestimmt. Auf Grund der Definition 2 hängt sie nur vom zugehörigen DV unter (1) ab. Also ist die Maßzahl von $\langle PQ\rangle$, die wir ebenso bezeichnen wollen, eine Funktion von Δ:

$$\langle PQ\rangle=f(\Delta). \tag{2}$$

Diese Funktion ist monoton. Ist dann R ein Punkt auf der Verlängerung von

[6] J. HJELMSLEV, loc. cit. [5], wobei eine allgemeinere Formel zu finden ist.

$\langle PQ\rangle$ (Fig. 5) und

(3) $$\varDelta' = \frac{\overline{QU}}{\overline{QV}} : \frac{\overline{RU}}{\overline{RV}},$$

so ist ebenso

(4) $$\langle QR\rangle = f(\varDelta').$$

Da ferner mit Rücksicht auf (1) und (3)

$$\varDelta\varDelta' = \frac{\overline{PU}}{\overline{PV}} : \frac{\overline{RU}}{\overline{RV}}$$

ist, so ist nach (1) und (2)

(5) $$\langle PR\rangle = f(\varDelta\varDelta').$$

Nun ist aber für die Maßzahlen

$$\langle PR\rangle = \langle PQ\rangle + \langle QR\rangle.$$

Es ergibt sich also aus (2), (4) und (5) die Funktionalgleichung

$$f(\varDelta\varDelta') = f(\varDelta) + f(\varDelta')$$

mit der einzigen monotonen Lösung

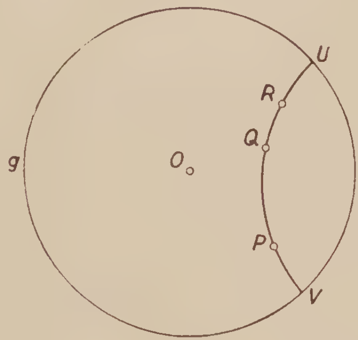

Fig. 5

$$f(\varDelta) = c \log \varDelta \qquad (c = \text{const}).$$

Es besteht also folgender

SATZ. *Die Maßzahl der Scheinstrecke $\langle PQ\rangle$ ist die Größe*

(II) $$\langle PQ\rangle = c \log \frac{\overline{PU}}{\overline{PV}} : \frac{\overline{QU}}{\overline{QV}},$$

wo U und V die Enden der Scheingeraden (PQ) sind, so bezeichnet, daß Q auf dem Bogen $\widehat{UV}$ zwischen P und U liegt, und c eine Konstante ist, die von der Wahl der Scheinlängeneinheit abhängt.

Die Scheinlängeneinheit wählen wir so, daß unter (II) $c = 1$ ist. Das bedeutet, daß für die Scheinlängeneinheit $\langle P_0Q_0\rangle$ das DV

$$\frac{\overline{P_0U_0}}{\overline{P_0V_0}} : \frac{\overline{Q_0U_0}}{\overline{Q_0V_0}} = e$$

ausfällt. Dann kann man im Sinne von (I) sofort $\operatorname{ctg} \frac{\varepsilon}{2} = e^{\langle PQ\rangle}$ oder, wenn wir $\langle PQ\rangle$ mit x und den zu x gehörigen Parallelwinkel nach LOBATSCHEFSKY mit $\Pi(x)$ bezeichnen,

(III$_1$) $$\operatorname{ctg} \frac{\Pi(x)}{2} = e^x$$

schreiben. Dies ist die *Grundformel der hyperbolischen nichteuklidischen Geometrie,* die man sofort in den Gestalten

$$(\mathrm{III}_2) \qquad \sin \Pi(x) = \frac{1}{\operatorname{ch} x}, \qquad \cos \Pi(x) = \operatorname{th} x, \qquad \operatorname{ctg} \Pi(x) = \operatorname{sh} x$$

wiedergeben kann.

§ 3

Nun sind die Grundformeln für die *Trigonometrie des rechtwinkligen Dreiecks* leicht zu gewinnen. In den Figuren 6 und 7, in denen die Scheingeraden als „wirkliche“ Geraden gezeichnet sind, ist mit H. LIEBMANN der Parallelwinkel einer klein lateinisch bezeichneten Strecke mit dem entsprechenden kleinen griechischen Buchstaben bezeichnet. Wir denken durch A die

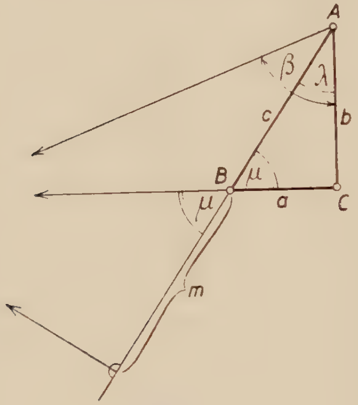

Fig. 6

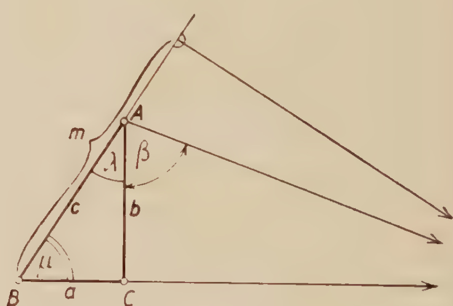

Fig. 7

eine Parallele zu BC gezogen und zum Winkel μ die Paralleldistanz m konstruiert. Dann ergeben sich sofort die bekannten[7] Winkelrelationen

$$\beta - \lambda = \Pi(c+m), \qquad \beta + \lambda = \Pi(c-m),$$

wobei $\Pi(x) = \pi - \Pi(-x)$ für $x < 0$ und $\Pi(0) = \frac{\pi}{2}$ zu setzen ist. Daraus folgt nach (III_2)

$$\sin(\beta - \lambda) = \frac{1}{\operatorname{ch}(c+m)}, \qquad \cos(\beta - \lambda) = \frac{\operatorname{sh}(c+m)}{\operatorname{ch}(c+m)}$$

[7] Vgl. F. ENGEL, *Nikolaj Iwanowitsch Lobatschefskij etc.* (Leipzig, 1898), S. 15—16, Formeln (1), (2).

und

$$\sin(\beta+\lambda)=\frac{1}{\operatorname{ch}(c-m)}, \qquad \cos(\beta+\lambda)=\frac{\operatorname{sh}(c-m)}{\operatorname{ch}(c-m)}.$$

Wird der Kürze wegen $\operatorname{ch}(c+m)\operatorname{ch}(c-m)=N$ gesetzt, so folgen aus diesen Formeln durch Addition bzw. Subtraktion

$$\sin\beta\cos\lambda=\frac{\operatorname{ch}c\operatorname{ch}m}{N}, \qquad \cos\beta\cos\lambda=\frac{\operatorname{sh}c\operatorname{ch}c}{N}$$

bzw.

$$\cos\beta\sin\lambda=\frac{\operatorname{sh}c\operatorname{sh}m}{N}, \qquad \sin\beta\sin\lambda=\frac{\operatorname{sh}m\operatorname{ch}m}{N}$$

und daraus

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{\operatorname{ch}m}{\operatorname{sh}c}, \qquad \operatorname{tg}\lambda=\frac{\operatorname{sh}m}{\operatorname{ch}c},$$

oder mit (III_2)

$$\sin\mu=\frac{\operatorname{sh}b}{\operatorname{sh}c}, \qquad \operatorname{ch}c=\operatorname{ctg}\lambda\operatorname{ctg}\mu.$$

Dann sind in bekannter Weise auch die übrigen Formeln des rechtwinkligen Dreiecks zu bestimmen.

(Eingegangen am 10. Oktober 1956.)

ON ADDITIVE AND MULTIPLICATIVE TOTALS

By

A. PRÉKOPA (Budapest)

(*Presented by* A. RÉNYI)

Introduction

In the present paper the terminology "total" is used for a generalization of the Burkill integral and multiplicative integral, respectively. The functions, the totals of which are considered, take their values from a Banach algebra $\mathfrak{B}$ with a unity. This means a Banach space $\mathfrak{B}$ in which for every pair $f \in \mathfrak{B}$, $g \in \mathfrak{B}$ a product $fg \in \mathfrak{B}$ is defined such that $\|fg\| \leqq \|f\| \, \|g\|$ and if $h \in \mathfrak{B}$, then $f(g+h) = fg + fh$, $(g+h)f = gf + hf$, finally there is an $e \in \mathfrak{B}$ with the properties $ef = fe = f$, $\|e\| = 1$. It is proved that under some conditions the additive (and multiplicative) total of a multiplicative (and additive, resp.) set function exists. The theorems of this type are useful in solving some functional equations (see e. g. [3] and § 6) and studying the properties of multiplicative set functions by tracing the problems to those formulated in terms of additive set functions.

The multiplicative integral (on the real axis for matrix-valued functions) has been introduced by V. VOLTERRA [12], [13], [14] and considered by several authors: L. SCHLESINGER [8], [9], [10], [11], G. RASCH [7], R. L. DOBRUŠIN [3]; G. BIRKHOFF [2] has given a generalization of this integral by using more general notions instead of matrices. The additive integral (on the real axis for matrix-valued functions) has been considered by M. FRÉCHET [4] and R. L. DOBRUŠIN [3]. The theorems proved in the present paper are analogous to those of DOBRUŠIN and will be used in the theory of stochastic set functions.[1] In § 6 we anticipate an example from this as in this special case (Example 1) the relevant statements can be proved at once by the aid of the present paper.

[1] A. PRÉKOPA, On stochastic set functions. III, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **8** (1957) (under press).

§ 1. Notions and notations

Throughout the paper the basic space will be denoted by H which is supposed to be metric and compact. We suppose that we are given a class of sets $\mathfrak{H}$ consisting of some subsets of H and satisfying the following conditions:

a) $\mathfrak{H}$ is a semi-ring, i. e. if $A_1 \in \mathfrak{H}$, $A_2 \in \mathfrak{H}$, then $A_1 A_2 \in \mathfrak{H}$ and if $A_1 \subseteq A_2$, then there exists a finite number of sets $C_1, C_2, \ldots, C_n$ such that $C_i \in \mathfrak{H}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, $C_i C_k = 0$ if $i \neq k$ and $A_2 - A_1 = \sum_{i=1}^{n} C_i$.[2] We suppose furthermore that this can be done always so that $n \leqq R$, where R is a positive integer independent of the sets A_1, A_2.

b) If $h \in H$, then $\{h\} \in \mathfrak{H}$.

c) If $A \in \mathfrak{H}$, then for every positive integer r and every $\varepsilon > 0$ there is a decomposition $A_1, A_2, \ldots, A_r$ of the set A into pairwise disjoint sets of $\mathfrak{H}$ such that $\max\limits_{1 \leqq k \leqq r} d(A_k) \leqq \varepsilon$.[3]

A finite sequence of sets $A_1, A_2, \ldots, A_r$, for which $A_i \in \mathfrak{H}$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$, $A_i A_k = 0$ if $i \neq k$ and $A = \sum_{k=1}^{r} A_k \in \mathfrak{H}$, will be called a decomposition of the set A (or briefly decomposition) and will be denoted by $\mathfrak{z} = \{A_1, A_2, \ldots, A_r\}$. If $\mathfrak{z}_1 = \{A_i^{(1)}\}$, $\mathfrak{z}_2 = \{A_i^{(2)}\}$ are two decompositions and every $A_i^{(2)}$ can be decomposed by means of some $A_i^{(1)}$, then we write $\mathfrak{z}_2 \sqsubset \mathfrak{z}_1$. We shall use the following definitions:

Definition 1. Let us suppose that to every decomposition $\mathfrak{z} = \{A_1, A_2, \ldots, A_r\}$ there corresponds a permutation $\mathfrak{P}(\mathfrak{z}) = (A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_r})$ of the sets of $\mathfrak{z}$ such that if $\mathfrak{z}_1 \sqsubset \mathfrak{z}_2$ and $\mathfrak{P}(\mathfrak{z}_1)$ is given by $(A_{i_1}^{(1)}, A_{i_2}^{(1)}, \ldots, A_{i_r}^{(1)})$, then in $\mathfrak{P}(\mathfrak{z}_2)$ first come those sets of $\mathfrak{z}_2$ which decompose $A_{i_1}^{(1)}$, then those which decompose $A_{i_2}^{(1)}$ etc.

A correspondence between the decompositions and permutations described above will be called a permutation function.

Definition 2. Let $f(A)$ $(A \in \mathfrak{H})$ be a set function with values in the Banach algebra $\mathfrak{B}$. If for every pair A_1, A_2 of disjoint sets of $\mathfrak{H}$, for which $A = A_1 + A_2 \in \mathfrak{H}$, the relation

$$(*) \qquad f(A) = f(A_1) + f(A_2)$$

[2] This notion of semi-rings, which is more general than that of P. Halmos (cf. *Measure theory*, Chapter I, § 4), is due to Á. Császár.

[3] If $B \subseteq H$, then $d(B)$ denotes the diameter of the set B, i. e. $d(B) = \sup \varrho(h_1, h_2)$ where $h_1 \in B$, $h_2 \in B$ and $\varrho(h_1, h_2)$ is the distance between h_1 and h_2.

holds, then the set function $f(A)$ will be called additive. Relation $(*)$ implies that $f(0)=0$.

DEFINITION 3. Let $g(A)$ $(A \in \mathfrak{H})$ be a set function with values in the Banach algebra $\mathfrak{B}$. If there is a permutation function $\mathfrak{P}$ such that for every system $A_1, A_2, \ldots, A_r$ of disjoint sets of $\mathfrak{H}$, for which $A=\sum_{k=1}^{r} A_k \in \mathfrak{H}$, the relation

$$g(A)=\prod_{k=1}^{r} g(A_{i_k})$$

holds where $\mathfrak{z}=\{A_1, A_2, \ldots, A_r\}$ and $\mathfrak{P}(\mathfrak{z})=(A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_r})$, then the set function $g(A)$ will be called multiplicative. We suppose in this case that $f(0)=e$.

If $\mathfrak{B}$ is commutative, then we do not require the existence of a permutation function $\mathfrak{P}$. All the statements in this paper are to be taken in the sense that if $\mathfrak{B}$ is commutative, then we omit the requirements regarding to the permutation function.

DEFINITION 4. A set function $\alpha(A)$ $(A \in \mathfrak{H})$ with values in $\mathfrak{B}$ is called of bounded variation if there is a number K such that for every system $A_1, A_2, \ldots, A_r$ of disjoint sets of $\mathfrak{H}$ we have

$$(**) \qquad \sum_{k=1}^{r} \|\alpha(A_k)\| \leqq K.$$

If $A_i \subseteq A$ $(i=1, 2, \ldots, r)$, then the smallest K for which relation $(**)$ holds will be denoted by $\mathrm{Var}_\alpha(A)$.

DEFINITION 5. A set function $\alpha(A)$ $(A \in \mathfrak{H})$ with values in $\mathfrak{B}$ is said to be γ-continuous if for every sequence $B_1, B_2, \ldots$ of sets of $\mathfrak{H}$, for which $\lim_{k\to\infty} B_k=0$ and $\lim_{k\to\infty} d(B_k)=0$, the relation

$$\lim_{k\to\infty} \mathrm{Var}_\alpha(B_k)=0$$

holds.

DEFINITION 6. Let $\alpha(A)$ $(A \in \mathfrak{H})$ be a set function with values in $\mathfrak{B}$. Suppose that there exists a $\beta(B)$ such that for every $\varepsilon>0$ a number $\delta>0$ can be found with the property

$$\left\|\sum_{k=1}^{r} \alpha(A_k)-\beta(B)\right\| \leqq \varepsilon,$$

provided that $\max_{1\leqq k\leqq r} d(A_k) \leqq \delta$ where $A_1, A_2, \ldots, A_r$ is a decomposition of the set $B \in \mathfrak{H}$. In this case we say that the additive total of $\alpha(A)$ exists in B

and we denote it by

$$\beta(B) = \mathsf{S}_B \alpha(dA).$$

DEFINITION 7. Let $\alpha(A)$ $(A \in \mathfrak{K})$ be a set function with values in $\mathfrak{B}$. Suppose that there exists a permutation function $\mathfrak{P}$ and a $\gamma(B) \in \mathfrak{B}$ such that for every $\varepsilon > 0$ a number $\delta > 0$ can be found with the property

$$\left\| \prod_{k=1}^{r} \alpha(A_{i_k}) - \gamma(B) \right\| \leqq \varepsilon,$$

provided that $\max_{1 \leqq k \leqq r} d(A_k) \leqq \delta$ where $(A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_r})$ is the permutation corresponding to the decomposition $\mathfrak{z} = \{A_1, A_2, \ldots, A_r\}$ of the set $B \in \mathfrak{K}$. In this case we say that the multiplicative total of $\alpha(A)$ exists in B relative to the permutation function $\mathfrak{P}$. This total will be denoted by

$$\gamma(B) = {}_{\mathfrak{P}}\prod_B \alpha(dA).$$

It is easy to see that both totals are uniquely determined and

$$\mathsf{S}_{A_1+A_2} \alpha(dA) = \mathsf{S}_{A_1} \alpha(dA) + \mathsf{S}_{A_2} \alpha(dA),$$

$${}_{\mathfrak{P}}\prod_{A_1+A_2+\cdots+A_r} \alpha(dA) = {}_{\mathfrak{P}}\prod_{A_{i_1}} \alpha(dA) \cdot {}_{\mathfrak{P}}\prod_{A_{i_2}} \alpha(dA) \cdots {}_{\mathfrak{P}}\prod_{A_{i_r}} \alpha(dA)$$

where $A_i \in \mathfrak{K}$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$, $A_i A_k = 0$ if $i \neq k$ and $(A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_r})$ is the permutation given by $\mathfrak{P}$, provided that the totals on both sides exist. If $\alpha_1(A)$ and $\alpha_2(A)$ are two set functions defined on $\mathfrak{K}$ and both are additively totalizable in B, then the same holds for $\alpha(A) = c_1\alpha_1(A) + c_2\alpha_2(A)$ and

$$\mathsf{S}_B \alpha(dA) = c_1 \mathsf{S}_B \alpha_1(dA) + c_2 \mathsf{S}_B \alpha_2(dA)$$

where c_1, c_2 are constants. An analogous relation holds also for the multiplicative total if $\mathfrak{B}$ is commutative. In this case if the multiplicative totals of $\alpha_1(A)$ and $\alpha_2(A)$ exist in $B \in \mathfrak{K}$, then that of $\alpha(A) = \alpha_1(A)\alpha_2(A)$ in B exists too and

$$\prod_B \alpha(dA) = \prod_B \alpha_1(dA) \prod_B \alpha_2(dA).$$

§ 2. Preliminary lemmas

In this § we prove some simple inequalities for Banach algebras and lemmas for additive and multiplicative set functions.

LEMMA 1. *If* $f_i \in \mathfrak{B}$, $g_i \in \mathfrak{B}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ and

$$\left\| \prod_{i=1}^{j} f_i \right\| \leqq K, \quad \left\| \prod_{i=j}^{n} g_i \right\| \leqq K \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

where K is a constant, then

$$\left\| \prod_{i=1}^{n} f_i - \prod_{i=1}^{n} g_i \right\| \leqq K^2 \sum_{i=1}^{n} \|f_i - g_i\|. \tag{1}$$

Proof. Since

$$\prod_{i=1}^{n} f_i - \prod_{i=1}^{n} g_i = \sum_{i=1}^{n} f_1 \ldots f_{i-1}(f_i - g_i) g_{i+1} \ldots g_n,$$

it follows that

$$\left\| \prod_{i=1}^{n} f_i - \prod_{i=1}^{n} g_i \right\| \leqq \sum_{i=1}^{n} \|f_1 \ldots f_{i-1}\| \, \|f_i - g_i\| \, \|g_{i+1} \ldots g_n\| \leqq K^2 \sum_{i=1}^{n} \|f_i - g_i\|.$$

Lemma 2. *Let $f_1, f_2, \ldots, f_n$ be such elements of $\mathfrak{B}$ that*

$$\sum_{i=1}^{n} \|f_i\| \leqq c < 1.$$

In this case if $r < n$, then

$$\begin{aligned} \Bigg\| \prod_{i=1}^{n} (e + f_i) - \Bigg(e + \sum_{i=1}^{n} f_i + \sum_{1 \leqq i_1 < i_2 \leqq n} f_{i_1} f_{i_2} \ldots f_{i_r} + \cdots + \\ + \sum_{1 \leqq i_1 < i_2 < \ldots < i_r \leqq n} f_{i_1} f_{i_2} \ldots f_{i_r} \Bigg) \Bigg\| \leqq \frac{1}{1-c} \left(\sum_{i=1}^{n} \|f_i\| \right)^{r+1}. \end{aligned} \tag{2}$$

Proof. Let us start from the identity

$$\prod_{i=1}^{n} (e + f_i) = e + \sum_{i=1}^{n} f_i + \sum_{1 \leqq i_1 < i_2 \leqq n} f_{i_1} f_{i_2} + \cdots + f_1 f_2 \ldots f_n.$$

It follows from this that

$$\left\| \prod_{i=1}^{n} (e + f_i) - \left(e + \sum_{i=1}^{n} f_i + \sum_{1 \leqq i_1 < i_2 \leqq n} f_{i_1} f_{i_2} + \cdots + \sum_{1 \leqq i_1 < i_2 < \ldots < i_r \leqq n} f_{i_1} f_{i_2} \cdots f_{i_r} \right) \right\| \leqq$$

$$\leqq \sum_{1 \leqq i_1 < i_2 < \ldots < i_{r+1} \leqq n} \|f_{i_1}\| \, \|f_{i_2}\| \cdots \|f_{i_{r+1}}\| + \cdots + \|f_1\| \, \|f_2\| \cdots \|f_n\| \leqq$$

$$\leqq \left(\sum_{i=1}^{n} \|f_i\| \right)^{r+1} + \cdots + \left(\sum_{i=1}^{n} \|f_i\| \right)^{n} \leqq \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|} \left(\sum_{i=1}^{n} \|f_i\| \right)^{r+1} \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{1-c} \left(\sum_{i=1}^{n} \|f_i\| \right)^{r+1}$$

what was to be proved.

For $r=0$ and $r=1$ we obtain as special cases of Lemma 2 the inequalities

(3) $$\left\| \prod_{i=1}^{n} (e+f_i) - e \right\| \leqq \frac{1}{1-c} \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|,$$

(4) $$\left\| \prod_{i=1}^{n} (e+f_i) - \left(e + \sum_{i=1}^{n} f_i\right) \right\| \leqq \frac{1}{1-c} \left(\sum_{i=1}^{n} \|f_i\| \right)^2.$$

LEMMA 3. *If $\alpha(A)$ $(A \in \mathfrak{H})$ is a set function of bounded variation with values in the Banach algebra $\mathfrak{B}$, then there exists a countable set $H_1 \subseteq H$ such that $\alpha(h)=0$ if $h \in H - H_1$ (we use the notation $\alpha(h)$ for $\alpha(\{h\})$).*

PROOF. Since $\alpha(A)$ is of bounded variation, the set of those h's for which $\|\alpha(h)\| \geqq \frac{1}{n}$, is finite. If n runs over the positive integers, then we obtain all the points h for which $\|\alpha(h)\| > 0$. Thus Lemma 3 is proved.

LEMMA 4. *Let $\alpha(A)$ $(A \in \mathfrak{H})$ be a multiplicative set function with values in the Banach algebra $\mathfrak{B}$ for which $K = \mathrm{Var}_{\alpha-e}(H) < \infty$. If $B_1 \in \mathfrak{H}$, $B_2 \in \mathfrak{H}$, $B_1 \subseteq B_2$ and $B_2 - B_1 = \sum_{k=1}^{r} C_k$ where $C_k \in \mathfrak{H}$ $(k=1,2,\dots,r)$, then*

$$\mathrm{Var}_{\alpha-e}(B_2 - B_1) \leqq (K+1)^{2r} \sum_{k=1}^{r} \mathrm{Var}_{\alpha-e}(C_i).$$

PROOF. Let $A_1, A_2, \dots, A_n$ be a system of disjoint sets of $\mathfrak{H}$,

$$\sum_{k=1}^{n} A_k \subseteq B_2 - B_1.$$

In this case

$$A_k = \sum_{i=1}^{r} A_k C_i \qquad (k=1,2,\dots,n).$$

If $\mathfrak{z}_k = \{A_k C_1, A_k C_2, \dots, A_k C_r\}$ and $\mathfrak{P}(\mathfrak{z}_k) = (A_k C_{i_1}, A_k C_{i_2}, \dots, A_k C_{i_r})$, then

$$\alpha(A_k) = \prod_{l=1}^{r} \alpha(A_k C_{i_l}).$$

Since $\|\alpha(B)\| \leqq \|\alpha(B)-e\| + 1 \leqq K+1$ $(B \in \mathfrak{H})$, it follows that

$$\left.\begin{aligned} \left\| \prod_{l=r_1}^{r} \alpha(A_k C_{i_l}) \right\| &\leqq (K+1)^r, \\ \left\| \prod_{l=1}^{r_1} \alpha(A_k C_{i_l}) \right\| &\leqq (K+1)^r \end{aligned}\right\} \qquad (1 \leqq r_1 \leqq r).$$

Hence, applying the inequality (1), we get

$$\sum_{k=1}^{n} \|e-\alpha(A_k)\| \leq \sum_{k=1}^{n} (K+1)^{2r} \sum_{l=1}^{r} \| e-\alpha(A_k C_l)\| \leq (K+1)^{2r} \sum_{l=1}^{r} \mathrm{Var}_{\alpha-e}(C_l).$$

Thus Lemma 4 is proved.

If α is additive, then we have the stronger relation

$$\mathrm{Var}_\alpha(B_2-B_1) \leq \sum_{k=1}^{r} \mathrm{Var}_\alpha(C_l).$$

LEMMA 5. *Let us suppose that the set function $\alpha(A)$ $(A \in \mathfrak{H})$ with values in the Banach algebra $\mathfrak{B}$ is multiplicative (and additive, resp.), $K-\mathrm{Var}_{\alpha-\alpha(0)}(H)<\infty$ and $\alpha(A)-\alpha(0)$ is r-continuous. Then for every $\varepsilon>0$ there can be found a $\delta>0$ such that if $U \in \mathfrak{H}$ is a set with $d(U) \leqq \delta$ and $\|\alpha(h)-\alpha(0)\| \leqq \varepsilon$ for $h \in U$, then*

$$\mathrm{Var}_{\alpha-\alpha(0)}(U) \leqq 2(K+1)^{2R}\varepsilon. \tag{5}$$

PROOF. Contrary to the assertion let us suppose that there exists an $\varepsilon_0>0$ and a sequence of sets U_k for which

$$\lim_{k\to\infty} d(U_k)=0, \quad \|\alpha(h)-\alpha(0)\| \leqq \varepsilon_0$$

if $h \in \sum_{k=1}^{\infty} U_k$ and

$$\mathrm{Var}_{\alpha-\alpha(0)}(U_k) > 2(K+1)^{2R}\varepsilon_0. \tag{6}$$

Since H is a compact metric space, we may suppose without restricting the generality that all the sequences h_k, where $h_k \in U_k$ $(k=1, 2, \ldots)$, are convergent. Let h' denote their common limit element. We can distinguish two cases.

In the first case h' is contained at most in a finite number of sets U_n. This implies that $\lim_{n\to\infty} U_n=0$ and thus, since $\alpha-\alpha(0)$ is r-continuous,

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}_{\alpha-\alpha(0)}(U_n)=0$$

which contradicts (6).

In the second case, if h' is contained in infinitely many U_n, then we choose a number N such that

$$\mathrm{Var}_{\alpha-\alpha(0)}(U_N-h') < \varepsilon_0.$$

The possibility of this is assured by Lemma 4 and the r-continuity of $\alpha-\alpha(0)$. According to (6) there exists in U_N a system of disjoint sets $A_1, A_2, \ldots, A_r$ that satisfies the inequality

$$\sum_{k=1}^{r} \|\alpha(A_k)-\alpha(0)\| > 2(K+1)^{2R}\varepsilon_0.$$

The element h' is contained at most in one of the sets A_i. If $h' \notin \sum_{i=1}^{r} A_i$, then

$$2\varepsilon_0(K+1)^{2R} < \sum_{k=1}^{r} \|\alpha(A_k)-\alpha(0)\| \leqq \mathrm{Var}_{\alpha-\alpha(0)}(U_N-h') < \varepsilon_0$$

which is a contradiction. On the other hand, if $h' \in A_m$, then there exist disjoint sets $C_1, C_2, \ldots, C_n$ $(n \leqq R)$ of the class of sets $\mathfrak{H}$ such that

$$A_m = \{h'\} + \sum_{k=1}^{n} C_k.$$

Now, let α be multiplicative. Applying Lemma 4 for $B_2 = A_m$, $B_1 = 0$, we get

$$\|e-\alpha(A_m)\| \leqq (K+1)^{2R}\left(\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}_{\alpha-e}(C_k) + \|e-\alpha(h')\|\right).$$

Using this relation we conclude

$$2(K+1)^{2R}\varepsilon_0 < \sum_{k=1}^{r} \|e-\alpha(A_k)\| = \sum_{k\neq m} \|e-\alpha(A_k)\| +$$

$$+\|e-\alpha(A_m)\| \leqq (K+1)^{2R}\left(\sum_{k\neq m}\|e-\alpha(A_k)\| + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}_{\alpha-e}(C_k) + \|e-\alpha(h')\|\right) \leqq$$

$$\leqq (K+1)^{2R}(\mathrm{Var}_{\alpha-e}(U_N-h') + \|e-\alpha(h')\|) \leqq 2\varepsilon_0(K+1)^{2R}.$$

If α is additive, then

$$2(K+1)^{2R}\varepsilon_0 < \sum_{k=1}^{r} \|\alpha(A_k)\| = \sum_{k\neq m} \|\alpha(A_k)\| + \|\alpha(A_m)\| \leqq \sum_{k\neq m} \|\alpha(A_k)\| +$$

$$+\sum_{k=1}^{n} \|\alpha(C_k)\| + \|\alpha(h')\| \leqq \mathrm{Var}_\alpha(U_N-h') + \|\alpha(h')\| \leqq 2\varepsilon_0 \leqq 2\varepsilon_0(K+1)^{2R}.$$

In both cases we arrived at contradictions, hence our lemma is proved.

LEMMA 6. *If $\alpha(B)$ $(\alpha(B) \in \mathfrak{B}$, $B \in \mathfrak{H})$ is a set function of bounded variation, then for every system $B_1, B_2, \ldots, B_r$ of disjoint sets of $\mathfrak{H}$*

$$\left\|\prod_{k=1}^{r}(e+\alpha(B_k))\right\| \leqq K_1$$

where K_1 is a constant.

PROOF. Let us select from the above product those $\alpha(B_k)$'s for which $\|\alpha(B_k)\| > \frac{1}{2}$. The number of these elements is at most $N_1 = [2\,\mathrm{Var}_\alpha(H)]$. After this we form a maximal number of groups of the remaining $\alpha(B_i)$'s such that in every group the sum of the norms fall in the interval $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$.

The number of these groups is at most $N_2=[4\,\mathrm{Var}_\alpha(H)]$. The sum of the norms of the remaining elements does not exceed $\frac{1}{4}$. Hence,

$$\left\|\prod_{k=1}^{r}(e+\alpha(B_k))\right\|\leqq 2^{N_2+1}(\mathrm{Var}_\alpha(H)+1)^{N_1}=K_1.$$

LEMMA 7. *Let us suppose that the set function $\alpha(A)$ $(A\in\mathfrak{H})$ with values in the Banach algebra $\mathfrak{B}$ is multiplicative (and additive, resp.), $K=\mathrm{Var}_{\alpha-\alpha(0)}(H)<\infty$ and $\alpha(A)-\alpha(0)$ is r-continuous. If $B_1, B_2\ldots$ is a sequence of sets of $\mathfrak{H}$, $h\in B_k$ $(k=1,2,\ldots)$, $\lim\limits_{k\to\infty} d(B_k)=0$, then*

$$\lim_{k\to\infty}\|\alpha(B_k)-\alpha(h)\|=0.$$

PROOF. Let $B_k=\{h\}+\sum\limits_{i=1}^{R} C_i^{(k)}$, $C_i^{(k)}\in\mathfrak{H}$ $(i=1,2,\ldots,R;\, k=1,2,\ldots)$ (we may always choose R such sets since if we had $r<R$, then we should complete this system by $R-r$ void sets) and let α be multiplicative. Applying Lemma 6 for $\alpha-e$ instead of α, moreover, using the inequality (1) we obtain

$$\|\alpha(B_k)-\alpha(h)\|\leqq K_1^2\sum_{i=1}^{R}\|\alpha(C_i^{(k)})-e\|\leqq K_1^2\sum_{i=1}^{R}\mathrm{Var}_{\alpha-e}(C_i^{(k)}).$$

Since $\lim\limits_{k\to\infty} C_i^{(k)}=0$ $(i=1,2,\ldots,R)$ and $\alpha(A)-e$ is r-continuous,

$$\lim_{k\to\infty}\mathrm{Var}_{\alpha-e}(C_i^{(k)})=0\qquad(i=1,2,\ldots,R)$$

which proves the assertion.

Let us now consider the case of an additive α. Since $\alpha(0)=0$, we get

$$\|\alpha(B_k)-\alpha(h)\|=\left\|\sum_{i=1}^{R}\alpha(C_i^{(k)})\right\|\leqq\sum_{i=1}^{R}\mathrm{Var}_\alpha(C_i^{(k)}).$$

The right-hand side tends to 0 when $k\to\infty$, hence our statement is completely proved.

§ 3. The additive total

In this § our purpose is to prove the following

THEOREM 1. *Let $f(A)$ $(f(A)\in\mathfrak{B})$ be a multiplicative set function defined on the elements of the class of sets $\mathfrak{H}$. Suppose that $K=\mathrm{Var}_{f-e}(H)$ is finite and the set function $f(A)-e$ is r-continuous. In this case the additive total*

$$g(B)=\mathsf{S}_B(f(dA)-e)$$

exists for every $B \in \mathfrak{K}$ *and*

$$\mathrm{Var}_g(B) \leqq \mathrm{Var}_{f-e}(B). \tag{7}$$

PROOF. For the proof of the Theorem we need two lemmas.

LEMMA 8. *For every* $h \in H$ *and every* $\varepsilon > 0$ *there can be found a* $\delta > 0$ *such that if* $A_1, A_2, \ldots, A_r$ *are pairwise disjoint sets of the class of sets* $\mathfrak{K}$ *with the property that* $A = \sum_{k=1}^{r} A_k \in \mathfrak{K}$, $h \in A$ and $d(A) \leqq \delta$, *then*

$$\left\| f(A) - e - \sum_{k=1}^{r} (f(A_k) - e) \right\| \leqq \varepsilon. \tag{8}$$

PROOF OF LEMMA 8. Let δ be such a number that satisfies the conditions in Lemma 5 for $\dfrac{\varepsilon}{4R(K+1)^{4R}}$ instead of ε. The number δ can be chosen so small that the sphere with the centre h and the radius δ does not contain an $h' \in H$ $(h' \neq h)$ with $\|f(h') - e\| > \dfrac{\varepsilon}{4R(K+1)^{4R}}$. We choose furthermore δ so small that $\|f(B) - f(h)\| \leqq \dfrac{\varepsilon}{4}$ if $h \in B \in \mathfrak{K}, d(B) \leqq \delta$. By Lemma 7 this is always possible. Let $h \in A_l$. Obviously

$$\left\| f(A) - e - \sum_{k=1}^{r} (f(A_k) - e) \right\| \leqq \|f(A) - f(A_l)\| + \mathrm{Var}_{f-e}(A - h) \leqq$$
$$\leqq \|f(A) - f(h)\| + \|f(A_l) - f(h)\| + \mathrm{Var}_{f-e}(A - h).$$

Let $C_1, C_2, \ldots, C_n$ $(n \leqq R)$ be a system of disjoint sets of $\mathfrak{K}$ for which $A - \{h\} = \sum_{k=1}^{n} C_k$. According to Lemmas 4 and 5

$$\mathrm{Var}_{f-e}(A - h) \leqq (K+1)^{2R} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}_{f-e}(C_k) \leqq (K+1)^{2R} \frac{n\varepsilon}{2R(K+1)^{2R}} \leqq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On the other hand, we have chosen δ in such a way that

$$\|f(A) - f(h)\| \leqq \frac{\varepsilon}{4}, \quad \|f(A_l) - f(h)\| \leqq \frac{\varepsilon}{4},$$

hence our lemma is proved.

LEMMA 9. *Let* $B \in \mathfrak{K}$. *To every* $\varepsilon > 0$ *there can be found a number* $\delta > 0$ *such that if* $A_1, A_2, \ldots, A_r$ $(A_k \in \mathfrak{K};\ k = 1, 2, \ldots, r)$ *is a system of disjoint subsets of* B, $\max\limits_{1 \leqq k \leqq r} d(A_k) \leqq \delta$ *and* $A_k^{(1)}, A_k^{(2)}, \ldots, A_k^{(r_k)}$ *is a decomposition of the*

set A_k into pairwise disjoint sets of $\mathfrak{H}$, then

$$\sum_{k=1}^{r}\left\|f(A_k)-e-\sum_{i=1}^{r_k}(f(A_k^{(i)})-e)\right\|\leq\varepsilon. \tag{9}$$

Proof of Lemma 9. We may suppose that the sets $A_k^{(i)}$ are so numbered that if $\mathfrak{z}_k=\{A_k^{(1)},A_k^{(2)},\ldots,A_k^{(r_k)}\}$, then $\mathfrak{S}(\mathfrak{z}_k)=(A_k^{(1)},A_k^{(2)},\ldots,A_k^{(r_k)})$. Since the variation of $f(A)-e$ is equal to K, the number of the points $h\in H$ for which $\|f(h)-e\|>\dfrac{\varepsilon}{8K(K+1)^{2R}}$ is at most $\dfrac{8K^2}{\varepsilon}(K+1)^{2R}$. If such a point exists in B, then we renumber the sets A_k so that those sets, which contain these points, be $A_1,A_2,\ldots,A_l\left(l\leq r, l\leq\dfrac{8K^2(K+1)^{2R}}{\varepsilon}\right)$. By Lemma 8 δ can be chosen so small that

$$\left\|f(A_k)-e-\sum_{i=1}^{r_k}(f(A_k^{(i)})-e)\right\|\leq\frac{\varepsilon}{2}\,\frac{\varepsilon}{8K^2(K+1)^{2R}}\leq\frac{\varepsilon}{2l}\qquad(k=1,2,\ldots,l). \tag{10}$$

If there are sets which do not contain such points and these are $A_{l+1},\ldots,A_r$, then we choose δ so small that besides (10) the following inequality holds:

$$\mathrm{Var}_{f-e}(A_k)\leq\frac{\varepsilon}{4K}\qquad(k=l+1,\ l+2,\ldots,r).$$

By Lemma 5 this is possible since the sets $A_{l+1},A_{l+2},\ldots,A_r$ do not contain points h with $\|f(h)-e\|>\dfrac{\varepsilon}{8K(K+1)^{2R}}$. Applying the inequality (4) for $f_i=f(A_k^{(i)})-e$ $(i=1,2,\ldots,r_k)$ we get (we may suppose that $0<\varepsilon\leq 2K$)

$$\begin{aligned}\left\|f(A_k)-e-\sum_{i=1}^{r_k}(f(A_k^{(i)})-e)\right\|&=\left\|\prod_{i=1}^{r_k}f(A_k^{(i)})-e-\sum_{i=1}^{r_k}(f(A_k^{(i)})-e)\right\|\leq\\ &\leq 2\left(\sum_{i=1}^{r_k}\|f(A_k^{(i)})-e\|\right)^2\leq 2(\mathrm{Var}_{f-e}(A_k))^2\leq 2\frac{\varepsilon}{4K}\mathrm{Var}_{f-e}(A_k).\end{aligned} \tag{11}$$

Our statement follows from the inequalities (10) and (11).

After these preparations we can complete the proof of Theorem 1. We point out that if $B\in\mathfrak{H}$ is a fixed set and $\mathfrak{z}_n=\{A_{nk}\}$ is a sequence of decompositions of B with $\lim\limits_{n\to\infty}\max\limits_{k}d(A_{nk})=0$, then the sequence

$$\sum_{k}(f(A_{nk})-e)$$

satisfies the Cauchy's convergence criterion. For this purpose we consider two decompositions $A_1,A_2,\ldots,A_r$ and $A'_1,A'_2,\ldots,A'_{r'}$ of the set B into pairwise disjoint sets of $\mathfrak{H}$ with $\max\limits_{1\leq k\leq r}d(A_k)\leq\delta$, $\max\limits_{1\leq k\leq r'}d(A'_k)\leq\delta$ where δ is the

same number as in Lemma 9. If δ is so small that (9) is satisfied with $\frac{\varepsilon}{2}$ instead of ε, then, considering the superposition of the two decompositions, a well-known argument shows that

$$\left\| \sum_{k=1}^{r} (f(A_k)-e) - \sum_{k=1}^{r'} (f(A'_k)-e) \right\| \leqq \varepsilon$$

and thus $\mathsf{S}_B (f(dA)-e)$ exists. The relation (7) can be proved in an obvious way.

§ 4. The multiplicative total

In this section we prove the following

THEOREM 2. *Let $g(B)$ $(g(B) \in \mathfrak{B})$ be an additive set function defined on the elements of the class of sets $\mathfrak{H}$. Suppose that* $\mathrm{Var}_g(H) < \infty$ *and the set function $g(B)$ $(B \in \mathfrak{H})$ is ι-continuous. In this case for any permutation function $\mathfrak{F}$ and for every $A \in \mathfrak{H}$ the total*

$$f(A) = {}_{\mathfrak{F}}\prod_A (g(dB)+e)$$

exists and

$$\mathrm{Var}_{f-e}(A) \leqq L \ \mathrm{Var}_g(A) \tag{12}$$

where L is a constant independent of the set A.

PROOF. First we prove two lemmas.

LEMMA 10. *For every $h \in H$ and $\varepsilon > 0$ there can be found a $\delta > 0$ such that if $B_1, B_2, \ldots, B_r$ are disjoint sets of $\mathfrak{H}$ with $B = \sum_{k=1}^{r} B_k \in \mathfrak{H}$, $h \in B$, $d(B) \leqq \delta$, then*

$$\left\| g(B)+e - \prod_{k=1}^{r} (g(B_k)+e) \right\| \leqq \varepsilon. \tag{13}$$

PROOF OF LEMMA 10. Let us suppose that $h \in B_l$. Using Lemma 6 and the inequality (1) it follows that

$$\left\| g(B)+e - \prod_{k=1}^{r} (g(B_k)+e) \right\| =$$

$$= \left\| e(g(B)+e)e - \prod_{k=1}^{l-1} (g(B_k)+e)(g(B_l)+e) \prod_{k=l+1}^{r} (g(B_k)+e) \right\| \leqq$$

$$\leqq K_1^2 \left(\left\| \prod_{k=1}^{l-1} (g(B_k)+e) - e \right\| + \left\| \prod_{k=l+1}^{r} (g(B_k)+e) - e \right\| + \| g(B) - g(B_l) \| \right).$$

Let $\varepsilon \leqq K_1^2$. By Lemmas 5 and 7 (taking into account the remark made after Lemma 4) δ can be chosen so that

(14) $$\mathrm{Var}_g(C-h) \leqq \frac{\varepsilon}{4K_1^2},$$

moreover

(15) $$\|g(C)-g(h)\| \leqq \frac{\varepsilon}{4K_1^2}$$

where $C \in \mathfrak{K}$, $h \in C$, $d(C) < \delta$; then from (3) and (14) it follows

$$\left\| \prod_{k=1}^{l-1} (g(B_k)+e)-e \right\| + \left\| \prod_{k=l+1}^{r} (g(B_k)+e)-e \right\| \leqq 2 \sum_{k=1}^{l-1} \|g(B_k)\| +$$
$$+2 \sum_{k=l+1}^{r} \|g(B_k)\| \leqq 2\,\mathrm{Var}_g(B-h) \leqq \frac{\varepsilon}{2K_1^2};$$

relation (15) implies that

$$\|g(B)-g(B_l)\| \leqq \frac{\varepsilon}{2K_1^2},$$

hence our assertion holds.

LEMMA 11. *Let $A \in \mathfrak{K}$. To every $\varepsilon > 0$ there can be found a number $\delta > 0$ such that if $B_1, B_2, \ldots, B_r$ ($B_k \in \mathfrak{K}$; $k = 1, 2, \ldots, r$) is a system of disjoint subsets of A and $B_k^{(1)}, B_k^{(2)}, \ldots, B_k^{(r_k)}$ is a decomposition of the set B_k into pairwise disjoint sets of $\mathfrak{K}$, $d(B_k) \leqq \delta$, then*

(16) $$\sum_{k=1}^{r} \left\| e+g(B_k) - \prod_{i=1}^{r_k} (e+g(B_k^{(i)})) \right\| \leqq \varepsilon.$$

PROOF OF LEMMA 11. If for a k we have $\mathrm{Var}_g(B_k) \leqq \frac{1}{2}$, then by the inequality (4) it follows that

$$\left\| e+g(B_k) - \prod_{i=1}^{r_k} (e+g(B_k^{(i)})) \right\| \leqq 2 \left(\sum_{i=1}^{r_k} \|g(B_k^{(i)})\| \right)^2 \leqq 2\,(\mathrm{Var}_g(B_k))^2.$$

The remaining part of the proof can be accomplished by the aid of Lemma 10 in a similar way as we have proved Lemma 9 by the aid of Lemma 8.

In order to complete the proof of Theorem 2 let us consider the decompositions $\{B_1, B_2, \ldots, B_r\}$, $\{B_1', B_2', \ldots, B_{r'}'\}$ of the set A into pairwise disjoint sets of $\mathfrak{K}$ satisfying $\max\limits_{1 \leqq k \leqq r} d(B_k) \leqq \delta$, $\max\limits_{1 \leqq k \leqq r'} d(B_k') \leqq \delta$ where δ is a number fixed in Lemma 11. Let $\{B_1'', B_2'', \ldots, B_{r''}''\}$ denote the superposition of these two decompositions. If δ is so small that the inequality (16) holds for $\frac{\varepsilon}{2K_1^2}$ instead

of ε, then

$$\left\| \prod_{k=1}^{r}(g(B_{i_k})+e)-\prod_{k=1}^{r'}(g(B'_{j_k})+e)\right\| \leqq \left\| \prod_{k=1}^{r}(g(B_{i_k})+e)-\prod_{k=1}^{r''}(g(B''_{n_k})+e)\right\| +$$

$$+\left\| \prod_{k=1}^{r'}(g(B'_{j_k})+e)-\prod_{k=1}^{r''}(g(B''_{n_k})+e)\right\| \leqq K_1^2\sum_{k=1}^{r}\left\| g(B_{i_k})+e-\right.$$

$$\left. -\prod_{B''_{n_s}\subseteq B_{i_k}}(g(B''_{n_s})+e)\right\| + K_1^2\sum_{k=1}^{r'}\left\| g(B'_{j_k})+e-\prod_{B''_{n_s}\subseteq B'_{j_k}}(g(B''_{n_s})+e)\right\| \leqq$$

$$\leqq \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

where the sequences i_k, j_k, n_k are fixed by the permutation function $\mathfrak{P}$ and in the products $\prod\limits_{B''_{n_s}\subseteq B_{i_k}}$, $\prod\limits_{B''_{n_s}\subseteq B'_{j_k}}$ the factors are arranged according to the same order as they were in the first row. Hence the existence of

$$f(A)={}_{\mathfrak{P}}\prod\nolimits_{A}(g(dB)+e)$$

follows in an obvious way.

The proof of (12) can be accomplished as follows. By making use of Lemma 1 we get

$$\left\| \prod_{k=1}^{r_s}(g(B_s^{(i_k)})+e)-e\right\| \leqq K_1^2\sum_{k=1}^{r_s}\|g(B_s^{(i_k)})\| \leqq K_1^2 \operatorname{Var}_g(B_s).$$

Hence it follows

$$\|f(B_s)-e\| \leqq K_1^2 \operatorname{Var}_g(B_s)$$

and

$$\sum_{s=1}^{r}\|f(B_s)-e\| \leqq K_1^2\sum_{s=1}^{r}\operatorname{Var}_g(B_s) \leqq K_1^2 \operatorname{Var}_g(A)$$

whence

$$\operatorname{Var}_{f-e}(A) \leqq K_1^2 \operatorname{Var}_g(A)$$

what was to be proved.

§ 5. Connection between the additive and multiplicative totals

According to Theorems 1 and 2 the indefinite additive (and multiplicative) total of a multiplicative (and additive, resp.) and v-continuous set function is also v-continuous. Hence it may be a starting function of further totalization. In this § we prove that the latter total (with respect to some permutation function) coincides with the original one. First we prove

THEOREM 3. *Let $g(B)$ $(g(B) \in \mathfrak{B})$ be an additive set function defined on the elements of the class of sets $\mathfrak{H}$ and satisfying the conditions of Theorem 2. If $A \in \mathfrak{H}$ and*

$$f(A) = {}_{\mathfrak{S}}\prod_A (g(dB)+e), \tag{17}$$

then the additive total of $f(A)-e$ exists in every $B \in \mathfrak{H}$ and

$$g(B) = \mathsf{S}_B (f(dA)-e). \tag{18}$$

PROOF. Let $B_1, B_2, \ldots, B_r$ be a system of disjoint sets of $\mathfrak{H}$ with the property that $A = \sum_{k=1}^{r} B_k \in \mathfrak{H}$, $\max_{1 \leq k \leq r} d(B_k) < \delta$. Relation (16) implies that in case of a small δ

$$\sum_{k=1}^{r} \|e+g(B_k)-f(B_k)\| \leqq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{19}$$

If we introduce the notation

$$g'(B) = \mathsf{S}_B (f(dA)-e),$$

then by (9), choosing δ small enough, we obtain

$$\sum_{k=1}^{r} \|g'(B_k)-(f(B_k)-e)\| \leqq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{20}$$

Relations (19) and (20) imply

$$\sum_{k=1}^{r} \|g(B_k)-g'(B_k)\| \leqq \varepsilon.$$

It follows that

$$\|g(A)-g'(A)\| = \left\| \sum_{k=1}^{r} g(B_k) - \sum_{k=1}^{r} g'(B_k) \right\| \leq \sum_{k=1}^{r} \|g(B_k)-g'(B_k)\| \leqq \varepsilon$$

and thus $g(A) = g'(A)$. Q. e. d.

A similar theorem can be proved if we start from a multiplicative set function. In advance we remind of Definition 3 that to every multiplicative set function a permutation function is attached. Our statement is expressed in

THEOREM 4. *Let $f(A)$ $(f(A) \in \mathfrak{B})$ be a multiplicative set function defined on the elements of the class of sets $\mathfrak{H}$ and satisfying the conditions of Theorem 1. If $B \in \mathfrak{H}$ and*

$$g(B) = \mathsf{S}_B (f(dA)-e), \tag{21}$$

moreover $\mathfrak{S}$ is a permutation function attached to f, then ${}_{\mathfrak{S}}\prod_A (g(dB)+e)$ exists for every $A \in \mathfrak{H}$ and

$$f(A) = {}_{\mathfrak{S}}\prod_A (g(dB)+e). \tag{22}$$

Proof. Let us introduce the notation

$$f'(A) = {}_{\mathfrak{S}}\prod_A (g(dB)+e).$$

If $A_1, A_2, \ldots, A_r$ is a system of disjoint sets of $\mathfrak{H}$ with the property that $\max\limits_{1\leqq k\leqq r} d(A_k) \leqq \delta$ and $B=\sum\limits_{k=1}^{r} A_k$, then by formula (9) (for a small δ)

$$\sum_{k=1}^{r} \|f(A_k)-e-g(A_k)\| \leqq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{23}$$

According to (16) we get furthermore that if δ is small enough, then

$$\sum_{k=1}^{r} \|e+g(A_k)-f'(A_k)\| \leqq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{24}$$

Hence, by (23) and (24),

$$\sum_{k=1}^{r} \|f(A_k)-f'(A_k)\| \leqq \varepsilon. \tag{25}$$

Let $\mathfrak{S}(\mathfrak{z})=(A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_r})$ be the permutation corresponding to $\mathfrak{z}=\{A_1, A_2, \ldots, A_r\}$. By Lemma 6 there exists a K_1 such that

$$\begin{gathered} \left\| \prod_{k=1}^{j} f(A_{i_k}) \right\| = \left\| \prod_{k=1}^{j} [(f(A_{i_k})-e)+e] \right\| \leqq K_1, \\ \left\| \prod_{k=j}^{r} f'(A_{i_k}) \right\| = \left\| \prod_{k=j}^{r} [(f'(A_{i_k})-e)+e] \right\| \leqq K_1. \end{gathered} \tag{26}$$

Taking into account (25) and (26) and applying Lemma 1 we obtain

$$\|f(A)-f'(A)\| = \left\| \prod_{k=1}^{r} f(A_{i_k}) - \prod_{k=1}^{r} f'(A_{i_k}) \right\| \leqq K_1^2\varepsilon,$$

hence $f(A)=f'(A)$. Q. e. d.

The last two theorems show that the indefinite total of an additive (and multiplicative, resp.) set function entirely determines the original set function.

§ 6. Examples

1. *The weighted random point distribution.* Let us consider a random selection of a finite number of points of H where each selected point is weighted with a (positive or negative) integer. We suppose that the sum of the weights in a set $A \in \mathfrak{H}$ is a random variable which we denote by $\xi(A)$. We suppose furthermore that if $A_1, A_2, \ldots, A_r$ are disjoint sets of $\mathfrak{H}$, then the random variables $\xi(A_1), \xi(A_2), \ldots, \xi(A_r)$ are independent. Let us introduce the notation

$$P_k(A) = \mathbf{P}(\xi(A)=k). \tag{27}$$

The sequences $P(A)=(\ldots, P_{-2}(A), P_{-1}(A), P_0(A), P_1(A), P_2(A), \ldots)$ are elements of the Banach algebra $\mathfrak{B}$ of the sequences the corresponding series of which are absolutely convergent with the norm of the sum of the absolute values. If the product of two elements $(\ldots, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots)$, $(\ldots, b_{-1}, b_0, b_1, \ldots)$ of $\mathfrak{B}$ is the convolution

$$\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{n-k} b_k;\ n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots\right), \tag{28}$$

then $\mathfrak{B}$ is commutative and has as unity element that one for which the member corresponding to the index 0 is equal to 1 and the others are 0. In this case $P(A)$ is a multiplicative set function. We may establish a more stronger statement, namely

$$P(A)=P(A_1)\,P(A_2)\ldots=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n} P(A_k) \tag{29}$$

if $A_i \in \mathfrak{H}$ $(i=1, 2, \ldots)$, $A_i A_k=0$ for $i \neq k$ and $A=\sum_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{H}$.

We shall show that $P(A)-e$ is of bounded variation and ν-continuous. Since

$$\|P(A)-e\|=\sum_{k\neq 0} P_k(A)+1-P_0(A)=2(1-P_0(A)),$$

we have to prove the assertion for the real-valued set function $1-P_0(A)$. Let us first extend the definition of $\xi(A)$ to $\mathfrak{R}(\mathfrak{H})$ which is the smallest ring[4] containing $\mathfrak{H}$. Let $A_1, A_2, \ldots$ be a sequence of disjoint sets of $\mathfrak{R}(\mathfrak{H})$. Since we have selected only a finite number of points from H, the sequence of independent random variables

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi(A_k)$$

converges with probability 1. Hence, by the three series theorem of KOLMOGOROV or simply by the Borel—Cantelli lemma,

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1-P_0(A_k)) < \infty.$$

On the other hand, $1-P_0(A)$ is completely subadditive in the following sense: if $A_1, A_2, \ldots$ is a sequence of disjoint sets of $\mathfrak{H}$ for which $A=\sum_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathfrak{R}(\mathfrak{H})$, then

$$1-P_0(A) \leqq \sum_{k=1}^{\infty} (1-P_0(A_k)).$$

[4] A class of sets $\mathfrak{R}$ is called a ring if $A+B \in \mathfrak{R}$, $A-B \in \mathfrak{R}$, provided that $A \in \mathfrak{R}$, $B \in \mathfrak{R}$. This extension is obviously possible and relation (29) will be satisfied also in $\mathfrak{R}(\mathfrak{H})$.

In fact, the event $\xi(A) \neq 0$ implies that at least one of $\xi(A_1) \neq 0, \xi(A_2) \neq 0, \ldots$ occurs. Hence, by Lemma 4 of [5], $1 - P_0(A)$ is of bounded variation and by Lemma 1 of [5] $\mathrm{Var}_{1-P_0}(A)$ $(A \in \mathfrak{R}(\mathfrak{H}))$ is a bounded measure. This last property implies that $1 - P_0(A)$ is c-continuous. Thus the additive total

$$Q(B) = \mathsf{S}_B (P(dA) - e) \tag{30}$$

exists for every $B \in \mathfrak{H}$. This implies obviously the existence of the totals

$$\begin{aligned} Q_0(B) &= \mathsf{S}_B (P_0(dA) - 1), \\ Q_k(B) &= \mathsf{S}_B P_k(dA) \qquad (k \neq 0). \end{aligned} \tag{31}$$

Since the convergence in (30) holds in the norm, it follows that

$$Q_0(B) = -\sum_{k \neq 0} Q_k(B). \tag{32}$$

Moreover, the relation

$$Q_k(B) \leqq -Q_0(B) \leqq \mathrm{Var}_{1-P_0}(B) \qquad (B \in \mathfrak{H})$$

implies that with $\mathrm{Var}_{1-P_0}(A)$ the additive set functions $-Q_0(B)$, $Q_k(B)$ $(k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ are also bounded measures. Finally, if $h \in H$, then

$$\mathsf{S}_{\{h\}} (1 - P_0(dA)) = 1 - P_0(\{h\}) \leqq 1,$$

hence

$$-Q_0(\{h\}) \leqq 1. \tag{33}$$

It is interesting to write all the solutions of (29) in a closed form, provided that the sequence $P(A)$ is a probability distribution. This can be done as follows. We start from a sequence of bounded measures $-Q_0(B), Q_k(B)$ $(k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ satisfying (32) and (33). Then every solution of (29) can be represented as

$$P(A) = \prod_A (e + Q(dB)) \qquad (A \in \mathfrak{H}) \tag{34}$$

where $Q(B) = (\ldots, Q_{-1}(B), Q_0(B), Q_1(B), \ldots)$. In fact, if $P(A)$ is a solution of (29), then the $Q(B)$ defined by (30) has the mentioned properties, hence by Theorem 4 (34) holds. Conversely, if $Q(B)$ has the mentioned properties, then by Theorem 2 (34) exists and the properties of $Q(B)$ imply that $P(A)$ is a probability distribution for every $A \in \mathfrak{H}$ and (29) holds. By Theorems 3 and 4 the correspondence between the set functions $P(A)$ and $Q(B)$ is one-to-one.

It is not difficult to see that $Q_k(B)$ is the expected number of points weighted with k in the set B. (This can be deduced immediately from the results of [6] too.) If there are no $h \in H$ such that $1 - P_0(\{h\}) > 0$, then $P(A)$

is a compound Poisson distribution, i. e. it has the characteristic function

(35) $$\exp \sum_{k \neq 0} Q_k(A)(e^{iku}-1).$$

If all the random points are weighted by 1, then from (35) we obtain a Poisson distribution

(36) $$\exp Q_1(A)(e^{iu}-1).$$

The proof of (35) can be accomplished with the aid of the relation (34). Similar statements are proved in [6].

2. *The linear integer-valued Markov process.* Let ξ_t be a Markov process on the linear interval $a \leqq t < b$. We suppose that ξ_t can take on only the values $1, 2, \ldots, N$. Let $\mathfrak{K}$ be the semi-ring of all the subintervals of $[a, b]$ (we permit here closed, open, semi-closed, degenerated intervals equally). If the right-hand and left-hand limits of the transition probability matrices $P(t_1, t_2)$ exist when t_1 or t_2 tend to a limit, then we can correspond to every $I \in \mathfrak{K}$ a matrix $P(I)$. $P(I)$ is an element of the (non-commutative) Banach algebra of N-rowed quadratic matrices, where the norm is the maximal value among the absolute column-sums. Obviously $\mathfrak{B}$ has a unity element. The set function $P(I)$ is then multiplicative relative to the natural permutation of linear intervals. Hence, if $P(I)$ is of bounded variation and r-continuous, then we can write the solution of the equation

(37) $$P(I_1+I_2)=P(I_1)P(I_2) \qquad (I_1 \in \mathfrak{K},\ I_2 \in \mathfrak{K},\ I_1+I_2 \in \mathfrak{K})$$

in a closed form. We will not enter into the details since in the paper of DOBRUŠIN [3] this is profoundly investigated under somewhat general assumptions. An analogous treatment can be given for the Markov processes having a countable number of possible states. To this question the author will return later.

Finally, I express my thanks to Á. CSÁSZÁR for his valuable remarks.

MATHEMATICAL INSTITUTE
OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

(Received 18 October 1956)

Bibliography

[1] N. ARLEY, *On the theory of stochastic processes and their applications to the theory of cosmic radiation* (New York, 1948).

[2] G. BIRKHOFF, On product integration, *Journal of Math. and Phys.*, 16 (1937), pp. 104—132.

[3] Р. Л. Добрушин, Обобщение уравнений Колмогорова для марковских процессов с конечным числом возможных состояний, Мат. Сборник, **33** (1953), pp. 566—596.

[4] M. Fréchet, *Recherches théoriques modernes sur le calcul des probabilités. II* (Paris, 1938), p. 210.

[5] A. Prékopa, Extension of multiplicative set functions with values in a Banach algebra, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **7** (1956), pp. 201–213.

[6] A. Prékopa, On abstract Poisson and composed Poisson stochastic set functions, *Studia Math.* (under press).

[7] G. Rasch, Zur Theorie und Anwendung des Produktintegrals, *Journal f. reine u. angew. Math.*, **171** (1943), pp. 65—119.

[8] L. Schlesinger, *Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen* (Berlin, 1908).

[9] L. Schlesinger, *Einführung in die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen auf funktionentheoretischer Grundlage* (Berlin, 1922).

[10] L. Schlesinger, Neue Grundlagen für einen Infinitesimalkalkül der Matrizen, *Math. Zeitschrift*, **33** (1931), pp. 33—61.

[11] L. Schlesinger, Weitere Beiträge zum Infinitesimalkalkül der Matrizen, *Math. Zeitschrift*, **35** (1932), pp. 485—501.

[12] V. Volterra, Sui fondamenti della teoria delle equazioni differenziali lineari, *Mem. Soc. Ital. Delle Scienze* (3), **6** (1887), p. 107.

[13] V. Volterra, Sulla teoria delle equazioni differenziali lineari, *Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo*, **3** (1888), pp. 69—75.

[14] V. Volterra, Sui fondamenti della teoria delle equazioni differenziali lineari, *Mem. Soc. Ital. delle Scienze* (3), **12** (1902), pp. 3—68.

ON SOME PROBABILITY PROBLEMS CONCERNING THE THEORY OF COUNTERS

By

L. TAKÁCS (Budapest)

(*Presented by* A. Rényi)

Introduction

1. The problem of single counter. Let us suppose that particles arrive at a counter in the instants $t_0, t_1, \ldots, t_n, \ldots$ where $t_0 = 0$ and the time differences $t_n - t_{n-1}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ are identically distributed independent positive random variables. Let us put $\mathbf{P}\{t_1 < x\} = F(x)$. Briefly $\{t_n\}$ will be called a recurrent process of events. The sequence of events $\{t_n\}$ will be filtered by the counter. We denote by $\{t'_n\}$ the sequence of the filtered events, which is a subsequence of $\{t_n\}$. We suppose that $\{t'_n\}$ is obtained by the following model of filtration (cf. [10]):

Let be $t'_0 = t_0$ and suppose that at time t_0 an impulse starts which has the duration χ_0. At time t_n $(n = 1, 2, \ldots)$ starts an impulse with probability p if at time t_n an impulse is in course, and with probability 1 if at time t_n there is no impulse in course. We suppose that the durations of the successive impulses which will be denoted by $\chi_0, \chi_1, \ldots, \chi_n, \ldots$ are identically distributed independent positive random variables with $\mathbf{P}\{\chi_n \leqq x\} = H(x)$. Further $\{\chi_n\}$ are independent of $\{t_n\}$. The sequence $\{t'_n\}$ are formed by the instants of $\{t_n\}$ which occur in such time when there is no impulse in course.

Denote by ν_t the number of events $\{t'_n\}$ occurring in the time interval $(0, t]$. We have dealt in [10] with the determination of the distribution function of ν_t. In § 1 we shall prove some theorems concerning the asymptotic behaviour of ν_t.

Denote by $P(t)$ the probability that at the instant t there is no impulse in course. We shall investigate the existence of the limit $\lim\limits_{t \to \infty} P(t) = P$.

2. The problem of many counters. Let us suppose that independently of each other particles arrive at the counters of a system consisting of m counters. We suppose that the laws of the arrivals of the particles and the models of the filtration are similar as mentioned above, but generally they have different parameters. We shall say that the system is at the instant t in the

state E_k $(k=0,1,2,\ldots,m)$, if at this instant impulses are taking place simultaneously in exactly k processes. If at the instant t a transtition $E_{k-1}\to E_k$ $(k=1,2,\ldots,m)$ occurs, we shall speak about a k-fold chance coincidence. In § 2 we shall determine the asymptotic density of the k-fold chance coincidences.

§ 1. The case of single counter

Let us introduce the following notations: $\mathbf{M}\{t_1\}=\mu$, $\mathbf{D}^2\{t_1\}=\sigma^2$ and $\mathbf{M}\{\chi_n\}=\alpha$, which values may be infinite too.

It is easily seen that the sequence $\{t_n'\}$ is similar to $\{t_n\}$, namely $t_0'=0$ and the time differences $t_n'-t_{n-1}'$ $(n=1,2,\ldots)$ are identically distributed independent positive random variables. Let $\mathbf{P}\{t_1'\leqq x\}=G(x)$ be their unknown common distribution function. Put $\mathbf{M}\{t_1'\}=A$ and $\mathbf{D}^2\{t_1'\}=B^2$.

The asymptotic behaviour of ν_t. For the expectation $\mathbf{M}\{\nu_t\}$ we have the following theorems: We have generally

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\mathbf{M}\{\nu_t\}}{t}=\frac{1}{A} \tag{1}$$

(S. Täcklind [11]). If $A<\infty$ and $G(x)$ is not a lattice distribution, then we have for any $h>0$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\mathbf{M}\{\nu_{t+h}-\nu_t\}}{h}=\frac{1}{A} \tag{2}$$

(D. Blackwell [1], J. L. Doob [4]). Under stronger restrictions concerning $G(x)$ we have

$$\lim_{t\to\infty}\frac{d\mathbf{M}\{\nu_t\}}{dt}=\frac{1}{A} \tag{3}$$

(S. Täcklind [12], W. Feller [6], D. R. Cox and W. L. Smith [2]). In the following

$$f=\frac{1}{A} \tag{4}$$

will be called the asymptotic density of the events occurring in $\{t_n'\}$. For the variance $\mathbf{D}^2\{\nu_t\}$ we have in case $B<\infty$ the following result:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\mathbf{D}^2\{\nu_t\}}{t}=\frac{B^2}{A^3}. \tag{5}$$

Now we shall prove a theorem concerning the asymptotic distribution of ν_t.

THEOREM 1. *If $B<\infty$ and $t\to\infty$, then the distribution of ν_t is asymptotically normal, i. e. we have*

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}\left\{\frac{\nu_t-\frac{t}{A}}{\sqrt{\frac{B^2t}{A^3}}}\leqq x\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\infty}^{x}e^{-u^2/2}du. \tag{6}$$

PROOF. We shall use a method given by W. FELLER [7]. It is easily seen that for all $t\geqq 0$ and integer $n>0$ we have

$$\mathbf{P}\{\nu_t<n\}=\mathbf{P}\{t<t_n'\}. \tag{7}$$

Put

$$n=\left[\frac{t}{A}+x\sqrt{\frac{B^2t}{A^3}}\right]. \tag{8}$$

As

$$\mathbf{P}\{\nu_t<n\}=\mathbf{P}\left\{\frac{\nu_t-\frac{t}{A}}{\sqrt{\frac{B^2t}{A^3}}}<\frac{n-\frac{t}{A}}{\sqrt{\frac{B^2t}{A^3}}}\right\}$$

and

$$\lim_{t\to\infty}\frac{n-\frac{t}{A}}{\sqrt{\frac{B^2t}{A^3}}}=x,$$

consequently

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}\{\nu_t<n\}=\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}\left\{\frac{\nu_t-\frac{t}{A}}{\sqrt{\frac{B^2t}{A^3}}}<x\right\}.$$

On the other hand

$$\mathbf{P}\{t<t_n'\}=\mathbf{P}\left\{\frac{t-nA}{\sqrt{nB^2}}<\frac{t_n'-nA}{\sqrt{nB^2}}\right\}$$

and

$$\lim_{t\to\infty}\frac{t-nA}{\sqrt{nB^2}}=-x,$$

consequently

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}\{t<t_n'\}=\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\left\{-x<\frac{t_n'-nA}{\sqrt{nB^2}}\right\}.$$

Now by the central limit theorem we have

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{-x < \frac{t_n' - nA}{\sqrt{nB^2}}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-u^2/2} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du$$

and so (6) is obtained by the equality $\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\nu_t < n\} = \lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{t < t_n'\}$.

In order to apply the above theorem we need the expectations $A = \mathbf{M}\{t_1'\}$ and $B^2 = \mathbf{D}^2\{t_1'\}$. To determine these we introduce the following conditional expectations:

(9) $$A(y) = \mathbf{M}\{t_1' \mid \chi_0 = y\}$$

and

(10) $$B^2(y) = \mathbf{D}^2\{t_1' \mid \chi_0 = y\}.$$

Knowing (9) and (10) by the theorem of total expectation we have

(11) $$A = \int_0^{\infty} A(y)\, dH(y)$$

and

(12) $$B^2 = \int_0^{\infty} B^2(y)\, dH(y) + \int_0^{\infty} [A(y) - A]^2 dH(y).$$

Further let us introduce a new random variable. Denote by t_ν the first event between $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ which gives rise to an impulse. The conditional probability distribution function $V_y(x) = \mathbf{P}\{t_\nu \leq x \mid \chi_0 = y\}$ may be determined easily if we take into consideration that

$$\mathbf{P}\{t_\nu \leq x \mid \chi_0 = y\} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\{\nu = n, t_n \leq x \mid \chi_0 = y\}$$

and

$$\mathbf{P}\{\nu = n, t_n \leq x \mid \chi_0 = y\} = \begin{cases} (1-p)^{n-1} p \mathbf{P}\{t_n \leq x\} & \text{if} \quad x \leq y, \\ (1-p)^{n-1} p \mathbf{P}\{t_n \leq y\} + (1-p)^{n-1} \mathbf{P}\{t_{n-1} \leq y < t_n < x\} & \\ & \text{if} \quad x > y \end{cases}$$

where

$$\mathbf{P}\{t_{n-1} \leq y < t_n \leq x\} = \int_0^{y} [F(x-u) - F(y-u)]\, dF_{n-1}(u).$$

In such a way we have

(13) $$V_y(x) = \begin{cases} p \sum_{n=1}^{\infty} (1-p)^{n-1} F_n(x) & \text{if} \quad x \leq y, \\ F(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (1-p)^n \left[\int_0^{y} F(x-u)\, dF_n(u) - F_n(y)\right] & \text{if} \quad y \leq x \end{cases}$$

where $F_n(x)$ denotes the n-fold iterated convolution of the distribution function $F(x)$ with itself. Put for $0 \leqq x < \infty$

$$V(x) = p \sum_{n=1}^{\infty} (1-p)^{n-1} F_n(x).$$

Define the following conditional expectations:

$$C(y) = \mathbf{M}\{t_\nu \mid \chi_0 = y\} \tag{14}$$

and

$$D^2(y) = \mathbf{D}^2\{t_\nu \mid \chi_0 = y\}. \tag{15}$$

THEOREM 2. *The conditional expectation* $A(y) = \mathbf{M}\{t_1' \mid \chi_0 = y\}$ *can be determined by the aid of the following integral equation:*

$$A(y) = \int_0^y A(y-x) H(y-x)\, dV(x) + \int_0^y \left[\int_{y-x}^{\infty} A(z)\, dH(z)\right] dV(x) + C(y). \tag{16}$$

PROOF. We have

$$\mathbf{M}\{t_1' \mid t_\nu = x,\ \chi_0 = y,\ \chi_1 = z\} = \begin{cases} x + A(y-x) & \text{if } 0 < z \leqq y-x \text{ and } 0 < x \leqq y, \\ x + A(z) & \text{if } y-x \leqq z < \infty \text{ and } 0 < x \leqq y, \\ x & \text{if } y < x < \infty, \end{cases}$$

and (16) follows easily by the theorem of total expectation.

THEOREM 3. *The conditional variance* $B^2(y) = \mathbf{D}^2\{t_1' \mid \chi_0 = y\}$ *can be determined by the aid of the following integral equation:*

$$\begin{aligned} B^2(y) = & \int_0^y B^2(y-x) H(y-x)\, dV(x) + \int_0^y \left[\int_{y-x}^{\infty} B^2(z)\, dH(z)\right] dV(x) + \\ & + \int_0^y [x + A(y-x)]^2 H(y-x)\, dV(x) + \int_0^y \left[\int_{y-x}^{\infty} (x + A(z))^2\, dH(z)\right] dV(x) + D^2(y). \end{aligned} \tag{17}$$

PROOF. We have

$$\mathbf{D}^2\{t_1' \mid t_\nu = x,\ \chi_0 = y,\ \chi_1 = z\} = \begin{cases} B^2(y-x) & \text{if } 0 < z \leqq y-x \text{ and } 0 < x \leqq y, \\ B^2(z) & \text{if } y-x \leqq z < \infty \text{ and } 0 < x \leqq y, \\ 0 & \text{if } y < x < \infty, \end{cases}$$

and (17) follows easily by the theorem of total expectation.

We remark that in the above case a law of the iterated logarithm is valid.

THEOREM 4. *If $B<\infty$, then we have*

$$\mathbf{P}\left\{\limsup_{t\to\infty}\frac{\nu_t-\frac{t}{A}}{\sqrt{\frac{2B^2}{A^3}t\log\log t}}=1\right\}= \tag{18}$$
$$=\mathbf{P}\left\{\liminf_{t\to\infty}\frac{\nu_t-\frac{t}{A}}{\sqrt{\frac{2B^2}{A^3}t\log\log t}}=-1\right\}=1.$$

This can be proved by the same method which furnished Theorem 1.

EXAMPLES. 1. Suppose $\chi_n\equiv\alpha$ (constant). Then $H(x)=0$ if $x<\alpha$ and $H(x)=1$ if $x\geqq\alpha$. Let $V_\alpha(x)=Z(x)$, then we have

$$A=\frac{\int_0^\infty x\,dZ(x)}{1-Z(\alpha)}, \tag{19}$$

and

$$B^2=\frac{\int_0^\infty x^2\,dZ(x)}{1-Z(\alpha)}+2A\frac{\int_0^\alpha x\,dZ(x)}{1-Z(\alpha)}-A^2. \tag{20}$$

2. Suppose that the random variables χ_n have an exponential distribution: $H(x)=1-e^{-x/\alpha}$ if $x\geqq0$ and $H(x)=0$ if $x<0$. Let us introduce the following Laplace—Stieltjes transforms:

$$\psi(s)=\int_0^\infty e^{-sy}\,dA(y),$$

$$\Omega(s)=\int_0^\infty e^{-sy}\,dV(y)$$

and

$$\Gamma(s)=\int_0^\infty e^{-sy}\,dC(y).$$

Taking the Laplace—Stieltjes transform of (18) we obtain

$$\psi\left(s+\frac{1}{\alpha}\right)=\psi\left(\frac{1}{\alpha}\right)+\frac{\Gamma(s)}{\Omega(s)}-\frac{1-\Omega(s)}{\Omega(s)}\psi(s).$$

By successive applications of this formula we can express $\psi\left(s+\frac{n}{\alpha}\right)$

$(n=1,2,\ldots)$ by the aid of $\psi(s)$ and $\psi\left(\frac{1}{\alpha}\right)$. If we take into consideration that $\psi\left(s+\frac{n}{\alpha}\right)\to 0$ if $n\to\infty$, then we get the following expression for $\psi(s)$:

$$\psi(s)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\psi\left(\frac{1}{\alpha}\right)+\frac{\Gamma\left(s+\frac{n}{\alpha}\right)}{\Omega\left(s+\frac{n}{\alpha}\right)}\right]\prod_{j=0}^{n}\frac{\Omega\left(s+\frac{j}{\alpha}\right)}{1-\Omega\left(s+\frac{j}{\alpha}\right)}. \tag{21}$$

Here $\psi\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ is still unknown. Put $s=\frac{1}{\alpha}$ then we obtain

$$\psi\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{\alpha}\right)}{\Omega\left(\frac{n}{\alpha}\right)}\prod\limits_{j=1}^{n}\frac{\Omega\left(\frac{j}{\alpha}\right)}{1-\Omega\left(\frac{j}{\alpha}\right)}}{1-\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\prod\limits_{j=1}^{n}\frac{\Omega\left(\frac{j}{\alpha}\right)}{1-\Omega\left(\frac{j}{\alpha}\right)}}.$$

Finally, $A(y)$ can be determined uniquely from (20) by inversion. For the expectation A we have

$$A=\frac{1}{\alpha}\int_0^{\infty}A(y)e^{-\frac{y}{\alpha}}\,dy=\psi\left(\frac{1}{\alpha}\right). \tag{22}$$

The conditional variance $B^2(y)$ may be determined similarly by Laplace—Stieltjes transformation.

REMARK 1. In case $B=\infty$ or $A=\infty$ the randon variable ν_t has an asymptotic distribution if and only if $G(x)$ has the following form:

$$1-G(x)=x^{-\alpha}h(x)$$

where $0<\alpha<2$ and for any positive constant c

$$\lim_{x\to\infty}\frac{h(cx)}{h(x)}=1.$$

This fact follows easily from a theorem given by W. DOEBLIN [3]. In these cases the asymptotic distribution of ν_t is a stable distribution function. (Cf. [9], p. 378, W. L. SMITH [8] and E. B. DYNKIN [5].)

The limit of $P(t)$. $P(t)$ denotes the probability that at the instant t there is no impulse in course in the investigated process. Let us denote by $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_n, \ldots$ the lengths of the dead times (covered by one ore more impulses) beginning in the instants $t_0', t_1', \ldots, t_n', \ldots$, resp. These are identically distributed independent positive random variables. Put $\mathbf{P}\{\tau_n \leqq x\} = U(x)$ and $\mathbf{M}\{\tau_n\} = T$. Further let us write $\mathbf{M}\{\nu_t\} = M(t)$.

The probability $P(t)$ can be expressed in the following form:

$$P(t) = U(t) - \int_0^t [1 - U(t-x)]\,dM(x). \tag{23}$$

Namely, the event that at the time t there is an impulse in course can occur in the following mutually exclusive ways: in the time interval $[0, t]$ the last event is t_n' $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ and the dead time starting in t_n' will not end before the instant t. So we have

$$1 - P(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}\{t_n' \leqq t < t_n' + \tau_n\} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t [1 - U(t-x)]\,dG_n(x)$$

where $G_n(x)$ denotes the n-th iterated convolution of the distribution function $G(x)$ with itself, with the convention $G_0(x) = 0$ if $x < 0$ and $G_0(x) = 1$ if $x \geqq 0$. We obtain (21) taking into consideration that

$$M(t) = \mathbf{M}\{\nu_t\} = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t).$$

THEOREM 5. *If $A < \infty$ and $G(x)$ is not a lattice distribution, then we have*

$$P = \lim_{t \to \infty} P(t) = \frac{A - T}{A}. \tag{24}$$

PROOF. According to the theorem of D. BLACKWELL [1] we have for any $h > 0$

$$\lim_{t \to \infty} \frac{M(t+h) - M(t)}{h} = \frac{1}{A}.$$

Using this fact and (23) with some calculation we obtain (24). The details can be found in [9], p. 389.

THEOREM 6. *In case $A < \infty$ we have*

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t P(u)\,du = \frac{A - T}{A}. \tag{25}$$

PROOF. Using (23) and the limit relation

$$\lim_{t\to\infty} \frac{M(t)}{t} = \frac{1}{A}$$

we obtain easily (25) (cf. [9], p. 391).

To determine the limit $P = \lim_{t\to\infty} P(t)$ we need the explicit form of T beside A. We proceed to find this. Let us introduce the conditional expectation

(26) $$T(y) = \mathbf{M}\{\tau_0 | \chi_0 = y\}.$$

We obtain

(27) $$T = \int_0^\infty T(y)\, dH(y).$$

THEOREM 7. *The conditional expectation* $T(y) = \mathbf{M}\{\tau_0|\chi_0 = y\}$ *can be obtained by the aid of the following integral equation:*

(28) $$T(y) = \int_0^y T(y-x)\, H(y)\, dx - V(x) + \int_0^y \left[\int_{y-x}^\infty T(z)\, dH(z)\right] dV(x) + \\ + \int_0^y x\, dV(x) + y[1 - V(y)].$$

PROOF. It is easily seen that

$$\mathbf{M}\{\tau_0 | t_\nu = x, \chi_0 = y, \chi_1 = z\} = \begin{cases} x + T(y-x) & \text{if } 0 < z \leqq y - x \text{ and } 0 < x \leqq y, \\ x + T(z) & \text{if } y - x \leqq z < \infty \text{ and } 0 < x \leqq y, \\ y & \text{if } y < x < \infty. \end{cases}$$

We obtain (28) by the theorem of total expectation.

The integral equation (28) is similar to (16), only $C(y)$ must be replaced by

$$C^*(y) = \int_0^y x\, dV(x) + y[1 - V(y)].$$

EXAMPLES. 1. Suppose $\chi_n \equiv \alpha$ (constant), then we have

(29) $$T = \frac{\int_0^\alpha [1 - Z(x)]\, dx}{1 - Z(\alpha)}$$

where $Z(x)$ is defined by $Z(x) = V_\alpha(x)$.

2. Put $H(x) = 1 - e^{-x/\alpha}$ if $x \geqq 0$. Denote by $\Gamma^*(s)$ the Laplace—Stieltjes transform of $C^*(x)$. Then the Laplace—Stieltjes transform of $T(y)$

is yielded by (21), however $\Gamma(s)$ must be replaced by $\Gamma^*(s)$. Thus, similarly to (22), we have

$$T=\frac{\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\Gamma^*(n/\alpha)}{\Omega(n/\alpha)}\prod_{j=1}^{n}\frac{\Omega(j/\alpha)}{1-\Omega(j/\alpha)}}{1-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\prod_{j=1}^{n}\frac{\Omega(j/\alpha)}{1-\Omega(j/\alpha)}}. \tag{30}$$

REMARK 2. The general model of filtration given in this paper may be used for Geiger—Müller counters ($p=0$ or $p>0$), for electron multipliers and crystal counters ($p=1$ or $p<1$), for mechanical recorders ($p=0$) and for electronic amplifiers ($p=1$). We have always supposed that the event-sequence $\{t_n\}$ is a recurrent process. The reasons for this were that it contains the most important special case, when $\{t_n\}$ is a Poisson process, further that the event-sequences $\{t_n'\}$, $\{t_n''\}, \ldots$ which are obtained at the consecutive stages of the counting procedure form also a recurrent sequence of events. Thus the problem of the successive filtrations may be reduced to the problem of a single filtration.

§ 2. The case of many counters

Let us consider m counters. We suppose that at each counter particles arrive independently of each other and according to a recurrent sequence of events. All counters filter the corresponding sequence of events by the law of the general model of filtration. It is allowed that the different sequences of events and the different counters have different dates, i. e. $F(x)$, $H(x)$ and p may be different for different counters.

We speak about the state E_k ($k=0,1,\ldots,m$) if at a given instant in exactly k processes an impulse is taking place. We call the transition $E_{k-1}\rightarrow E_k$ ($k=1,2,\ldots,m$) as k-fold chance coincidence.

We shall investigate the asymptotic law of the k-fold chance coincidences.

Let us introduce the following notations: Denote by $P_1(t), P_2(t), \ldots, P_m(t)$ the probability that at the instant t there is no impulse in course in the $1,2,\ldots,m$-th process. Furthermore denote by $M_1(t), M_2(t), \ldots, M_m(t)$ the expected number of the filtered events in the time interval $(0,t]$ in the $1,2,\ldots,m$-th process, resp.

THEOREM 8. *Denote by* $M_{k,k+1}(t)$ ($k=0,1,2,\ldots,m-1$) *the expectation of the number of* $k+1$*-fold chance coincidences occurring in the time interval*

$(0, t]$. *We have*

$$(31)\qquad M_{k,k+1}(t)=\sum_{j=1}^{m}\int_{0}^{t}\frac{P_1(u)P_2(u)\ldots P_m(u)}{P_j(u)}\prod_{(i_1,i_2,\ldots,i_k\neq j)}\frac{1-P_{i_1}(u)}{P_{i_1}(u)}\cdot\frac{1-P_{i_2}(u)}{P_{i_2}(u)}\cdots\frac{1-P_{i_k}(u)}{P_{i_k}(u)}\,dM_j(u)$$

where the product figuring in the j-th member of the sum extends over all k-fold combinations from $1, 2, \ldots, j-1, j+1, \ldots, m$ *without repetitions.*

PROOF. Consider the filtered events occurring in each process. If we take into consideration all the events which occur at a moment when exactly in k processes an impulse is taking place we obtain the $k+1$-fold chance coincidences. The expectation of the number of such events occurring in the time interval $(0, t]$ yields (31).

THEOREM 9. *Define by*

$$(32)\qquad f_{k,k+1}=\lim_{t\to\infty}\frac{M_{k,k+1}(t+h)-M_{k,k+1}(t)}{h}$$

the asymptotic density of the $k+1$*-fold chance coincidences. If the limits*

$$(33)\qquad \lim_{t\to\infty}P_j(t)=P_j\qquad (j=1,2,\ldots,m)$$

and

$$(34)\qquad \lim_{t\to\infty}\frac{M_j(t+h)-M_j(t)}{h}=f_j\qquad (j=1,2,\ldots,m)$$

exist, then we have

$$(35)\qquad f_{k,k+1}=\sum_{j=1}^{m}f_j\frac{P_1P_2\ldots P_m}{P_j}\prod_{(i_1,i_2,\ldots,i_k\neq j)}\frac{1-P_{i_1}}{P_{i_1}}\cdot\frac{1-P_{i_2}}{P_{i_2}}\cdots\frac{1-P_{i_k}}{P_{i_k}}.$$

PROOF. Using (31), (35) follows evidently.

REMARK 3. The formula (31) is generally valid without any assumption for the initial state of each process. If we consider other initial state as was mentioned in the Introduction, then we must replace $P_j(t)$ and $M_j(t)$ $(j=1,2,\ldots,m)$ by suitable modificated functions. These new functions can easily be expressed by the aid of $P_j(t)$ and $M_j(t)$. However, the limit (35) is unaltered because it is independent of the initial state. In case of stationary process (35) yields the density of the $k+1$-fold chance coincidences.

REMARK 4. It would be important to determine the asymptotic distribution of the k-fold chance coincidences. In some special cases also the exact distribution can be determined (cf. [9]).

If, especially, we assume that at each counter particles arrive according to a Poisson process with density λ and for each counter $p=0$ and $H(x)=1-e^{-x\alpha}$ if $x\geqq 0$, then the k-fold chance coincidences are asymptot-

ically normally distributed. For instance, denote by $\nu_t^{(m)}$ the number of m-fold chance coincidences occurring in the time interval $(0, t]$, then we have

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\left\{\frac{\nu_t^{(m)}-\dfrac{t}{A_m}}{\sqrt{\dfrac{B_m^2 t}{A_m^3}}}\leq x\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\,du$$

where

$$A_m=\frac{(1+\lambda\alpha)^m}{m\lambda^m\alpha^{m-1}}$$

and

$$B_m^2=\frac{(1+\lambda\alpha)^{m-1}\left\{(1+\lambda\alpha)^{m+1}+2\left[\sum_{j=1}^{m-1}\frac{1}{j}\binom{m}{j+1}(\lambda\alpha)^{m-j}-m(\lambda\alpha)^m\right]\right\}}{m^2\lambda^{2m}\alpha^{2m-2}}.$$

MATHEMATICAL INSTITUTE
OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

(Received 24 December 1956)

References

[1] D. Blackwell, A renewal theorem, *Duke Math. Journal*, **15** (1948), pp. 145—150.

[2] D. R. Cox and W. L. Smith, A direct proof of a fundamental theorem of renewal theory, *Skandinavisk Aktuarietidskrift*, **33** (1953), pp. 139—150.

[3] W. Doeblin, Sur l'ensemble de puissances d'une loi de probabilité, *Studia Mathematica*, **9** (1941), pp. 71—96.

[4] J. L. Doob, Renewal theory from the point of view of the theory of probability, *Transactions of the Amer. Math. Soc.*, **63** (1948), pp. 422—438.

[5] Е. Б. Дынкин, Некоторые предельные теоремы для сумм независимых случайных величин с бесконечными математическими ожиданиями, Изв. Акад. Наук СССР, Сер. мат., **19** (1955), pp. 247—266.

[6] W. Feller, On the integral equation of renewal theory, *Annals of Math. Stat.*, **12** (1941), pp. 243—267.

[7] W. Feller, Fluctuation theory of recurrent events, *Transactions of the Amer. Math. Soc.*, **67** (1949), pp. 98—119.

[8] W. L. Smith, Regenerative stochastic processes, *Proceedings of the Royal Society*, Ser. A, **232** (1955), pp. 6—31.

[9] L. Takács, Részecskeszámlálók elméletében fellépő sztochasztikus folyamatokról, *MTA Mat. és Fiz. Oszt. Közl.*, **6** (1956), pp. 369—421.

[10] L. Takács, On the sequence of events, selected by a counter from a recurrent process of events, Теория вероятностей и ее применения, **1** (1956), pp. 90—102.

[11] S. Täcklind, Elementare Behandlung vom Erneuerungsproblem für den stationären Fall, *Skandinavisk Aktuarietidskrift*, **27** (1944), pp. 1—15.

[12] S. Täcklind, Fourieranalytische Behandlung vom Erneuerungsproblem, *Skandinavisk Aktuarietidskrift*, **28** (1945), pp. 68—105.

BEGRÜNDUNG DER ANALYTISCHEN GEOMETRIE DER HYPERBOLISCHEN EBENE MIT DEN KLASSISCHEN HILFSMITTELN, UNABHÄNGIG VON DER TRIGONOMETRIE DIESER EBENE

Von

PAUL SZÁSZ (Budapest)

(*Vorgelegt von* G. HAJÓS)

Einleitung

Die analytische Geometrie der hyperbolischen Ebene läßt sich im Besitze der hyperbolischen Trigonometrie durch die Einführung der Weierstraßschen homogenen Koordinaten in wohlbekannter Weise entwickeln. Was die Trigonometrie anbetrifft, hat sie H. LIEBMANN [1] in der hyperbolischen Ebene selbst, mit den klassischen Hilfsmitteln, d. h. durch Anwendung der *hyperbolischen Parallelen* und des *Grenzkreises* hergeleitet.[2] Mit denselben Hilfsmitteln ist es aber auch möglich, die genannten Weierstraßschen Koordinaten unter Vermeidung der hyperbolischen Trigonometrie unmittelbar einzuführen und zur Begründung der analytischen Geometrie der hyperbolischen Ebene einen direkten Weg einzuschlagen. Das soll in vorliegender Arbeit dargelegt werden.

Die hyperbolische Trigonometrie ist schon als Folgerung in dieser analytischen Geometrie enthalten, wir haben aber nicht vor, darauf an dieser Stelle einzugehen.

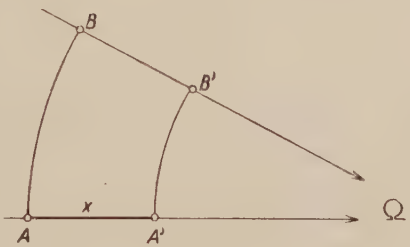

Fig. 1

Wir setzen die fundamentalen Eigenschaften der hyperbolischen Parallelen und des Grenzkreises als bekannt voraus. Insbesondere werden wir von dem Satz Gebrauch machen, laut welches für zwei konzentrische Grenzkreisbogen $\widehat{AB} > \widehat{A'B'}$ zwischen denselben Achsen

[1] H. LIEBMANN, Elementare Ableitung der nichteuklidischen Trigonometrie, *Berichte über die Verhandlungen der Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Math.-phys. Klasse,* **59** (1907), S. 187—210.

[2] Vgl. auch PAUL SZÁSZ, Neue Bestimmung des Parallelwinkels in der hyperbolischen Ebene mit den klassischen Hilfsmitteln, *Acta Sci. Math.,* **14** (1952), S. 247—251, wobei eine andere, und zwar einfachere Herleitung dieser Art zu finden ist.

AA', BB' und mit dem Abstand $\overline{AA'} = \overline{BB'} = x$ (Fig. 1), das Verhältnis

(1)
$$\frac{\widehat{AB}}{\widehat{A'B'}} = e^x$$

ausfällt, wenn nur die Längeneinheit geeignet gewählt wird. Diese Längeneinheit heißt *natürliche Längeneinheit,* und die auf sie bezogenen Maßzahlen der Strecken nennt man *natürliche Maßzahlen.*

§ 1. Unmittelbare Einführung der Weierstraßschen homogenen Koordinaten. Koordinate eines Fernpunktes

Wir legen unserer Darstellung den folgenden Satz der reellen Analysis zu Grunde, durch den ein eineindeutiges Entsprechen zwischen Zahlenpaaren und gewissen Zahlentripeln hergestellt wird.

Satz 1. *Zwischen den Zahlenpaaren* (t, σ) *und den Zahlentripeln* (x_1, x_2, x_3), *in denen*

(1)
$$x_3^2 - x_2^2 - x_1^2 = 1$$

und

(2)
$$x_3 > 0$$

ist, findet ein eineindeutiges Entsprechen statt. Dieses Entsprechen kann dadurch hergestellt werden, daß man einem jeden Zahlenpaar (t, σ) *das Zahlentripel*

(3)
$$x_1 = \operatorname{sh} t + \frac{1}{2}\sigma^2 e^{-t}, \qquad x_2 = \sigma e^{-t}, \qquad x_3 = \operatorname{ch} t + \frac{1}{2}\sigma^2 e^{-t}$$

zuordnet.

Beweis. Für das Zahlentripel (3) erweist sich die Gleichung (1) sofort als richtig. Und mittelst der dritten Gleichung unter (3) fällt das Bestehen von (2) ins Auge.

Wir werden jetzt zeigen, daß, umgekehrt, jedes Zahlentripel (x_1, x_2, x_3) von den Eigenschaften (1) und (2) durch die Zuordnung (3) genau einem Zahlenpaar (t, σ) entspricht.

Aus (1) folgt zunächst

$$x_3^2 = 1 + x_1^2 + x_2^2 > x_1^2,$$

also ist mit Rücksicht auf (2) gewiß $x_3 > x_1$, d. h.

(4)
$$x_3 - x_1 > 0.$$

Wenn es nun überhaupt ein Zahlenpaar (t, σ) gibt, für welches die Gleichungen unter (3) bestehen, so muß

$$x_3 - x_1 = \operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t = e^{-t}$$

oder

$$e^t = \frac{1}{x_3 - x_1} \tag{5}$$

gelten. Eine solche Zahl t gibt es aber genau eine, da doch nach (4) die rechte Seite von (5) positiv ausfällt. Aus der zweiten Gleichung unter (3) ergibt sich weiter mit Verwendung von (5)

$$\sigma = \frac{x_2}{x_3 - x_1}. \tag{6}$$

Das gegebene Zahlentripel (x_1, x_2, x_3) von den Eigenschaften (1) und (2) kann also durch die Zuordnung (3) nur dem durch (5) und (6) bestimmten Zahlenpaar (t, σ) entsprechen. Eine direkte Rechnung zeigt, daß es dem in der Tat entspricht.

Durch (3) wird demnach zwischen den Zahlenpaaren (t, σ) und den Zahlentripeln (x_1, x_2, x_3) von den Eigenschaften (1) und (2), ein eineindeutiges Entsprechen hergestellt, w. z. b. w.

In unseren späteren Erörterungen spielt noch eine Eigenschaft der Zuordnung (3), die in dem nachstehenden Satz ihren Ausdruck findet, eine entscheidende Rolle.

Satz 2. *Für die Zahlentripeln* (x_1, x_2, x_3) *und* $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$, *welche durch die Zuordnung* (3) *der Reihe nach den Zahlenpaaren* (t, σ), $(\bar{t}, \bar{\sigma})$ *entsprechen, ist stets*

$$x_3\bar{x}_3 - x_2\bar{x}_2 - x_1\bar{x}_1 > 0. \tag{7}$$

Durch einfache Rechnung ergibt sich nämlich auf Grund von (3)

$$x_3\bar{x}_3 - x_2\bar{x}_2 - x_1\bar{x}_1 =$$
$$= \operatorname{ch}(t - \bar{t}) + \frac{1}{2} e^{-(t+\bar{t})} (\sigma - \bar{\sigma})^2,$$

wodurch die Ungleichung (7) in Evidenz tritt.

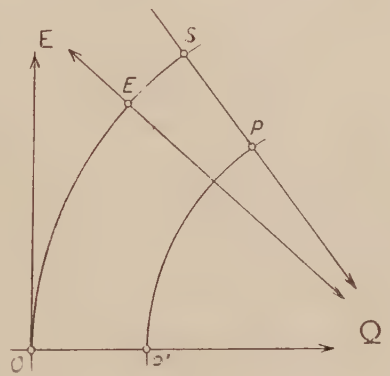

Fig. 2

Es seien nun in der hyperbolischen Ebene ein Punkt O und die Fernpunkte Ω, E derart gewählt, daß $\sphericalangle \Omega O$E ein rechter Winkel ist (Fig. 2). Die Gerade $O\Omega$ werde von O nach Ω, und OE nach E gerichtet. Endlich sei die Gerade ΩE von dem Grenzkreis durch O mit dem Mittelpunkt Ω in E geschnitten. Ist P ein beliebiger Punkt der Ebene und wird die Gerade $O\Omega$ von dem Grenzkreis durch P mit dem Mittelpunkt Ω in P', die Gerade $P\Omega$ von dem vorher genannten Grenzkreis in S geschnitten, so nennt man die in natürlicher Maßzahl ausgedrückte Strecke $t = \overline{OP'}$ und das Verhältnis

$\sigma = \widehat{OS} : \widehat{OE}$ die *Grenzkreiskoordinaten* des Punktes P in diesem *Koordinatensystem* $\Omega O \mathrm{E}$; das Vorzeichen von t ist durch den Richtungssinn der Geraden $O\Omega$ bestimmt, und σ wird positiv oder negativ genommen, je nachdem die Bogen $\widehat{OS}$ und $\widehat{OE}$ gleichsinnig oder ungleichsinnig sind.

Die reellen Zahlenpaare (t, σ) entsprechen auf diese Weise offenbar eineindeutig den Punkten der Ebene. Infolge des Satzes 1 wird deshalb durch die Zuordnung (3) zwischen den Punkten (t, σ) der Ebene und den Zahlentripeln (x_1, x_2, x_3) von den Eigenschaften (1) und (2), ein eineindeutiges Entsprechen hergestellt. Auf diesem Grunde sollen die unter (3) definierten Zahlen x_1, x_2, x_3 als die *Weierstraßschen homogenen Koordinaten* des Punktes (t, σ) erklärt werden.

Aus (3) ergeben sich für $t = 0$, $\sigma = 0$ als *die Weierstraßschen homogenen Koordinaten des Anfangspunktes O*

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 0, \qquad x_3 = 1. \tag{8}$$

Ist Ξ ein von Ω verschiedener Fernpunkt und wird die Gerade $\Xi\Omega$ von dem zu Grunde gelegten Grenzkreis in X geschnitten (Fig. 3), so werde die zweite Grenzkreiskoordinate ξ von X, d. h. $\xi = \widehat{OX} : \widehat{OE}$ als die *Koordinate* dieses Fernpunktes Ξ erklärt.

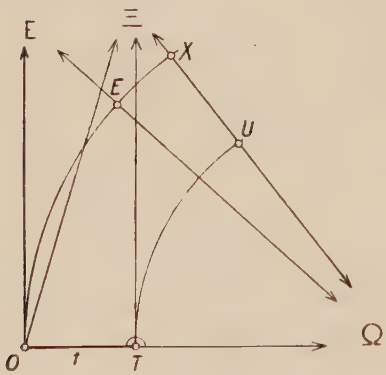

Fig. 3

Bezeichne T die Projektion des Fernpunktes Ξ auf $O\Omega$ (falls die Gerade $O\Xi$ von $O\Omega$ verschieden ist) und die Gerade $\Xi\Omega$ schneide den Grenzkreis durch T mit dem Mittelpunkt Ω in U (Fig. 3). Wegen der Kongruenz der rechtwinkligen Dreiecke $\Omega T \Xi$ und $\Omega O \mathrm{E}$ (mit je zwei unendlich fernen Ecken) ist dem Betrage nach $\widehat{TU} = \widehat{OE}$, also wird, durch $t = \overline{OT}$ ausgedrückt, der Betrag der Koordinate ξ von Ξ dem in der Einleitung unter (1) angeführten Satz zufolge

$$|\xi| = \frac{\widehat{OX}}{\widehat{OE}} = e^t. \tag{9}$$

Die nachstehenden zwei Hilfssätze, die wir gleich im folgenden § brauchen werden, sind unmittelbare Folgen von (9).

Hilfssatz 1. *Wird die Ebene längs der Geraden $O\Omega$ mit der Strecke a verschoben, so geht ein jeder Fernpunkt Ξ von der Koordinate ξ in einen Fernpunkt Ξ' über, dessen Koordinate $\xi' = e^a \xi$ ist* (Fig. 4).

Hilfssatz 2. *Legt man durch den Punkt O eine von $O\Omega$ verschiedene Gerade, so ist das Produkt der Koordinaten ξ und ξ^* ihrer Fernpunkte Ξ, Ξ^* stets* $\xi\xi^* = -1$ (Fig. 5).

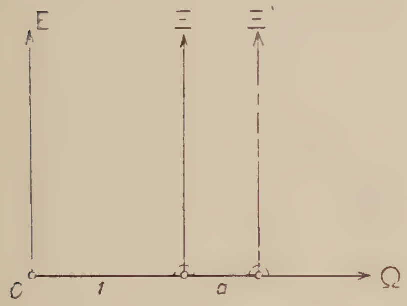

Fig. 4

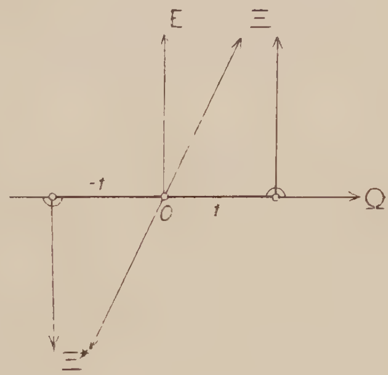

Fig. 5

§ 2. Die Gleichung der Geraden. Weierstraßsche homogene Linienkoordinaten

Unter Benützung der vorigen zwei Hilfssätze leiten wir nun die Gleichung der Geraden her.

Wir betrachten zunächst eine Gerade mit den von Ω verschiedenen Fernpunkten Ξ, H, die der Reihe nach die Koordinaten ξ, η haben (Fig. 6). Es sei durch Grenzkreiskoordinaten angegeben $P(t, \sigma)$ ein beliebiger Punkt dieser Geraden. Der andere Fernpunkt Σ der Geraden $P\Omega$ hat dann die Koordinate σ, und die Gerade $O\Omega$ wird von dem Grenzkreis durch P mit dem Mittelpunkt Ω in einem Punkte P' geschnitten, für den mit Vorzeichen genommen $\overline{OP'} = t$ ausfällt. Es bezeichne Σ^* den Fernpunkt von der Koordinate $\dfrac{\sigma}{2}$. Durch die Spiegelung an der Geraden $\Sigma^*\Omega$ geht P offenbar in den Punkt P', dieser durch die Verschiebung längs der Geraden $O\Omega$ mit der Strecke $-t$ in O über. Die ursprüngliche Gerade ΞH wird daher durch die Aufeinanderfolge von dieser Spiegelung und Verschiebung in eine solche versetzt, die durch den Punkt O läuft. Die Fernpunkte Ξ, H gehen bei der genannten Spiegelung offenbar in

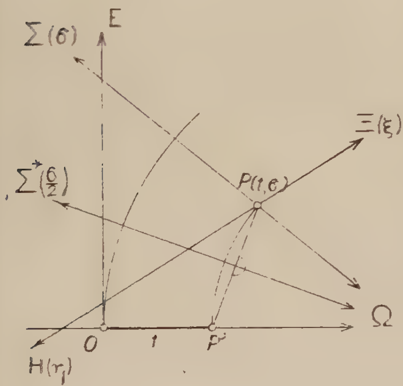

Fig. 6

die von den Koordinaten $\sigma-\xi$, $\sigma-\eta$ über. Sodann werden die Koordinaten der Fernpunkte, in die diese letzteren durch jene Verschiebung übergehen, laut des Hilfssatzes 1 im vorigen § der Reihe nach $e^{-t}(\sigma-\xi), e^{-t}(\sigma-\eta)$. Da aber die Verbindungsgerade dieser Fernpunkte identisch mit derjenigen ist, in welche $\Xi\mathrm{H}$ versetzt wurde, also durch den Punkt O geht, so ist nach dem Hilfssatz 2 das Produkt dieser zwei Koordinaten

$$e^{-2t}(\sigma-\xi)(\sigma-\eta)=-1. \tag{1}$$

Demnach genügen die Grenzkreiskoordinaten t, σ eines jeden Punktes der betrachteten Geraden $\Xi\mathrm{H}$, dieser Gleichung (1). Es leuchtet sofort ein, daß auch jeder Punkt, durch dessen Grenzkreiskoordinaten t, σ diese Gleichung (1) erfüllt wird, der Geraden $\Xi\mathrm{H}$ angehört. (1) ist also die Gleichung dieser Geraden in Grenzkreiskoordinaten. Sie geht wegen

$$(\sigma-\xi)(\sigma-\eta)=\xi\eta-(\xi+\eta)\sigma+\sigma^2$$

durch Multiplikation mit e^t in die Gleichung

$$\xi\eta e^{-t}-(\xi+\eta)\sigma e^{-t}+\sigma^2 e^{-t}+e^t=0$$

über, und dieser kann mit Rücksicht auf die Formeln unter (3) im vorigen § die Gestalt

$$\xi\eta(x_3-x_1)-(\xi+\eta)x_2+x_3+x_1=0$$

gegeben werden.

Damit ist gezeigt, daß eine Gerade, deren zwei Fernpunkte Ξ, H *die Koordinaten* ξ, η *haben, in Weierstraßschen homogenen Koordinaten* x_1, x_2, x_3 *durch die Gleichung*

$$(\xi\eta-1)x_1+(\xi+\eta)x_2-(\xi\eta+1)x_3=0 \tag{2}$$

charakterisiert werden kann.

Wird ein Fernpunkt von der Koordinate η mit Ω verbindet, so lautet die Gleichung dieser Verbindungsgeraden in Grenzkreiskoordinaten offenbar $\sigma-\eta=0$. Durch Multiplikation mit e^t wird diese Gleichung infolge der Formeln (3) des vorigen §

$$x_2-\eta(x_3-x_1)=0.$$

Die Gleichung der Geraden, die den Fernpunkt H *von der Koordinate* η *mit* Ω *verbindet, lautet also in Weierstraßschen homogenen Koordinaten*

$$\eta x_1+x_2-\eta x_3=0. \tag{3}$$

Wird die Gerade (2) nach dem Fernpunkt Ξ gerichtet, so sollen die Zahlen

$$u=\frac{\xi\eta-1}{\xi-\eta}, \qquad v=\frac{\xi+\eta}{\xi-\eta}, \qquad w=\frac{\xi\eta+1}{\xi-\eta} \tag{4}$$

als die *Weierstraßschen homogenen Linienkoordinaten* dieser gerichteten Geraden erklärt werden. Als solche erkläre man für die nach Ω gerichteten Geraden (3)

die Zahlen

(5) $$u=\eta, \qquad v=1, \qquad w=\eta;$$

bei Umkehrung des Richtungssinnes sollen die Linienkoordinaten dieser Geraden mit —1 multipliziert werden.

Es besteht für die Weierstraßschen homogenen Linienkoordinaten u, v, w *einer gerichteten Geraden in jedem Falle*

(6) $$u^2+v^2-w^2=1,$$

und ihre Gleichung kann in Weierstraßschen homogenen Koordinaten x_1, x_2, x_3 *in der „Normalform"*

(7) $$ux_1+vx_2-wx_3=0$$

geschrieben werden. Umgekehrt ist eine jede Gleichung dieser Art, in welcher die Koeffizienten u, v, w *der Forderung* (6) *genügen, die Gleichung einer gerichteten Geraden in ihrer Normalform.*

Davon überzeugt man sich leicht auf Grund der Erklärungen unter (4) und (5).

§ 3. Transformation der Weierstraßschen homogenen Linienkoordinaten

Nun sehen wir zu, wie sich die Weierstraßschen homogenen Linienkoordinaten transformieren, wenn statt des ursprünglichen $\Omega O E$ ein neues Koordinatensystem $\Omega' O' E'$ gewählt wird?

Die Beantwortung dieser Frage kann auf die bekannte Tatsache gegründet werden, daß bei einer Bewegung bzw. Umwendung der Ebene, ein jeder Fernpunkt von der Koordinate ξ in denjenigen übergeht, dessen Koordinate

(1) $$\xi'=\frac{\alpha\xi+\beta}{\gamma\xi+\delta}$$

ist, wobei $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ von ξ unabhängig sind und

(2) $$\alpha\delta-\beta\gamma=\pm 1$$

ausfällt, je nachdem eine Bewegung bzw. Umwendung vorliegt.[3] (Im Falle $\gamma \neq 0$ geht der Fernpunkt von der Koordinate $-\frac{\delta}{\gamma}$ in Ω, und Ω in den Fernpunkt von der Koordinate $\frac{\alpha}{\gamma}$ über.) Die Linienkoordinaten einer Geraden g

[3] Siehe z. B. PAUL SZÁSZ, Über die Hilbertsche Begründung der hyperbolischen Geometrie, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, 4 (1953), 243—250, insbesondere S. 246—247.

in Bezug auf das neue System $\Omega' O' E'$ sind nämlich die derjenigen Geraden g' in dem ursprünglichen System $\Omega O E$, in die g bei derjenigen Bewegung bzw. Umwendung übergeht, durch die $\Omega' O' E'$ in $\Omega O E$ übergeführt wird.

Sind die Fernpunkte der gerichteten Geraden g von Ω, sowie von Ω' verschieden und sind die Koordinaten ξ, η so gewählt, daß g nach dem Fernpunkt von der Koordinate ξ gerichtet ist, so sind im Sinne von (1) die Koordinaten der entsprechenden Fernpunkte von g' der Reihe nach

$$(1^*) \qquad \xi' = \frac{\alpha\xi + \beta}{\gamma\xi + \delta}, \qquad \eta' = \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta}.$$

Auf Grund dieser Formeln (1*) ergeben sich mit Rücksicht auf (2) für die Linienkoordinaten der Geraden g' in Bezug auf das ursprüngliche System die Werte (§ 2, (4))

$$u' = \frac{\xi'\eta' - 1}{\xi' - \eta'} = \frac{(\alpha^2 - \gamma^2)\xi\eta + (\alpha\beta - \gamma\delta)(\xi + \eta) + \beta^2 - \delta^2}{\pm(\xi - \eta)},$$

$$v' = \frac{\xi' + \eta'}{\xi' - \eta'} = \frac{2\alpha\gamma\xi\eta + (\beta\gamma + \alpha\delta)(\xi + \eta) + 2\beta\delta}{\pm(\xi - \eta)},$$

$$w' = \frac{\xi'\eta' + 1}{\xi' - \eta'} = \frac{(\alpha^2 + \gamma^2)\xi\eta + (\alpha\beta + \gamma\delta)(\xi + \eta) + (\beta^2 + \delta^2)}{\pm(\xi - \eta)}.$$

Es sind aber, wie sofort ersichtlich (§ 2, (4)), durch die ursprünglichen Linienkoordinaten der Geraden g ausgedrückt

$$\xi - \eta = \frac{2}{w - u}, \qquad \xi\eta = \frac{w + u}{w - u}, \qquad \xi + \eta = \frac{2v}{w - u}$$

und durch Einsetzen in die obigen Formeln erhält man nach u, v, w geordnet

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} u' &= \pm\left\{ \frac{\alpha^2 - \gamma^2 - \beta^2 + \delta^2}{2} u + (\alpha\beta - \gamma\delta) v + \frac{\alpha^2 - \gamma^2 + \beta^2 - \delta^2}{2} w \right\}, \\ v' &= \pm\{(\alpha\gamma - \beta\delta) u + (\beta\gamma + \alpha\delta) v + (\alpha\gamma + \beta\delta) w\}, \\ w' &= \pm\left\{ \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2 - \delta^2}{2} u + (\alpha\beta + \gamma\delta) v + \frac{\alpha^2 + \gamma^2 + \beta^2 + \delta^2}{2} w \right\}. \end{aligned} \right.$$

Werden hierbei in der j-ten Gleichung die Koeffizienten von u, v, w der Reihe nach mit a_{j1}, a_{j2}, a_{j3} bezeichnet ($j = 1, 2, 3$), so lauten diese Formeln

$$(3^*) \quad \left\{ \begin{aligned} u' &= a_{11} u + a_{12} v + a_{13} w, \\ v' &= a_{21} u + a_{22} v + a_{23} w, \\ w' &= a_{31} u + a_{32} v + a_{33} w. \end{aligned} \right.$$

Diese Formeln (3) bzw. (3*) sind auch dann gültig, wenn die Fernpunkte von g nicht beide von Ω und Ω' verschieden sind. Davon überzeugt man sicht leicht, in jedem möglichen Falle.

Für die Koeffizienten auf der rechten Seite von (3*) *gelten die Gleichungen*

$$\left\{\begin{aligned} a_{11}^2+a_{21}^2-a_{31}^2&=1,\\ a_{12}^2+a_{22}^2-a_{32}^2&=1,\\ -a_{13}^2-a_{23}^2+a_{33}^2&=1 \end{aligned}\right. \tag{4}$$

und auch noch

$$\left\{\begin{aligned} a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22}-a_{31}a_{32}&=0,\\ a_{12}a_{13}+a_{22}a_{23}-a_{32}a_{33}&=0,\\ a_{13}a_{11}+a_{23}a_{21}-a_{33}a_{31}&=0. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Diese ergeben sich auf Grund von (2) durch einfache Rechnung, mit Rücksicht auf die unter (3) angeschriebenen Ausdrücke der Koeffizienten a_{jk}.

Die aus den Koeffizienten a_{jk} *gebildete Determinante ist*

$$D=\pm\begin{vmatrix} \dfrac{\alpha^2-\gamma^2-\beta^2+\delta^2}{2} & \alpha\beta-\gamma\delta & \dfrac{\alpha^2-\gamma^2+\beta^2-\delta^2}{2}\\ \alpha\gamma-\beta\delta & \beta\gamma+\alpha\delta & \alpha\gamma+\beta\delta\\ \dfrac{\alpha^2+\gamma^2-\beta^2-\delta^2}{2} & \alpha\beta+\gamma\delta & \dfrac{\alpha^2+\gamma^2+\beta^2+\delta^2}{2} \end{vmatrix}=1, \tag{6}$$

wie man sich davon auf Grund der ersten Gleichung unter (4) und mit Rücksicht auf (2), durch die Entwicklung

$$D=a_{11}D_1+a_{21}D_2+a_{31}D_3$$

nach den Elementen der ersten Kolonne leicht überzeugen kann.

Zusammenfassend können wir also über die Transformation der Weierstraßschen homogenen Linienkoordinaten folgendes aussagen:

Sind die Weierstraßschen homogenen Linienkoordinaten einer gerichteten Geraden g in Bezug auf das Koordinatensystem $\Omega O E$ *der Reihe nach* u, v, w, *so ergeben sich ihre Linienkoordinaten* u', v', w' *bezüglich eines neuen Systems* $\Omega' O' E'$ *aus den Formeln unter* (3*), *wobei die Koeffizienten* a_{jk} *von g unabhängig sind und der Gleichungen unter* (4) *und* (5) *genügen, ferner die Determinante dieser Transformation*

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=1 \tag{6*}$$

ausfällt.

Aus (4) und (5) folgt bekanntlich,[1] daß *für die Koeffizienten* a_{jk} *auch die Gleichungen*

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} a_{11}^2+a_{12}^2-a_{13}^2&=1,\\ a_{21}^2+a_{22}^2-a_{23}^2&=1,\\ -a_{31}^2-a_{32}^2+a_{33}^2&=1 \end{aligned}\right.$$

und

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} a_{11}a_{21}+a_{12}a_{22}-a_{13}a_{23}&=0,\\ a_{21}a_{31}+a_{22}a_{32}-a_{23}a_{33}&=0,\\ a_{31}a_{11}+a_{32}a_{12}-a_{33}a_{13}&=0 \end{aligned}\right.$$

bestehen. Diese Gleichungen können übrigens ähnlich wie die unter (4) und (5), durch direkte Rechnung verifiziert werden.

Aus (3) folgen schon durch eine leichte Überlegung die Formeln

$$\begin{aligned} u&=\pm\left\{\frac{\delta^2-\gamma^2-\beta^2+\alpha^2}{2}u'+(\alpha\gamma-\beta\delta)v'+\frac{\delta^2-\gamma^2+\beta^2-\alpha^2}{2}w'\right\},\\ v&=\pm\{(\alpha\beta-\gamma\delta)u'+(\beta\gamma+\alpha\delta)v'-(\alpha\beta+\gamma\delta)w'\},\\ w'&=\pm\left\{\frac{\delta^2+\gamma^2-\beta^2-\alpha^2}{2}u'-(\alpha\gamma+\beta\delta)v'+\frac{\delta^2+\gamma^2+\beta^2+\alpha^2}{2}w'\right\}. \end{aligned}$$

Das bedeutet, mit Rücksicht auf die unter (3) angeschriebenen Ausdrücke der Koeffizienten a_{jk} in (3*), folgendes:

Die ursprünglichen Weierstraßschen homogenen Linienkoordinaten u, v, w *sind durch die auf das neue System* $\Omega' O' \mathrm{E}'$ *bezogenen Linienkoordinaten* u', v', w' *ausgedrückt*

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} u&=a_{11}u'+a_{21}v'-a_{31}w',\\ v&=a_{12}u'+a_{22}v'-a_{32}w',\\ w&=-a_{13}u'-a_{23}v'+a_{33}w', \end{aligned}\right.$$

wobei die Koeffizienten a_{jk} *mit denen unter* (3*) *identisch ausfallen.*

§ 4. Transformation der Weierstraßschen homogenen Punktkoordinaten. Der Abstand zweier Punkte

Es seien die Weierstraßschen homogenen Koordinaten eines Punktes P in Bezug auf das Koordinatensystem $\Omega O \mathrm{E}$ der Reihe nach x_1, x_2, x_3, die auf das neue System $\Omega' O' \mathrm{E}'$ bezogenen Koordinaten desselben Punktes x_1', x_2', x_3'.

[1] Vgl. z. B. G. Kowalewski, *Einführung in die Determinantentheorie einschließlich der unendlichen und der Fredholmschen Determinanten* (Leipzig, 1909), S. 161.

Wir sehen zu, wie sich die ursprünglichen Koordinaten durch die neuen ausdrücken lassen, und umgekehrt?

Es sei zu diesem Zwecke durch den Punkt P eine gerichtete Gerade g gelegt, deren Weierstraßschen homogenen Linienkoordinaten in Bezug auf das ursprüngliche Koordinatensystem $\Omega O E$ der Reihe nach u, v, w, im neuen System $\Omega' O' E'$ entsprechend u', v', w' sind. Durch diejenige Bewegung oder Umwendung, welche das System $\Omega' O' E'$ in $\Omega O E$ überführt, gehen die Gerade g und der Punkt P in g' bzw. P' über, die auf das System $\Omega O E$ bezogen die Linien- bzw. Punktkoordinaten u', v', w' bzw. x_1', x_2', x_3' haben. Da aber die Gerade g' durch den Punkt P' hindurchgeht, so ist (§ 2, (7))

$$u' x_1' + v' x_2' - w' x_3' = 0.$$

Diese Gleichung nimmt durch Anwendung der Transformationsformeln der Weierstraßschen homogenen Linienkoordinaten (§ 3, (3*)) die Gestalt

$$(1)\quad (a_{11}x_1' + a_{21}x_2' - a_{31}x_3')\,u + (a_{12}x_1' + a_{22}x_2' - a_{32}x_3')\,v - (-a_{13}x_1' - a_{23}x_2' + a_{33}x_3')\,w = 0$$

an. Wenn der Kürze halber die Bezeichnung

$$(2)\qquad \begin{cases} y_1 = a_{11}x_1' + a_{21}x_2' - a_{31}x_3', \\ y_2 = a_{12}x_1' + a_{22}x_2' - a_{32}x_3', \\ y_3 = -a_{13}x_1' - a_{23}x_2' + a_{33}x_3' \end{cases}$$

eingeführt wird, so geht diese Gleichung (1) in

$$(1^*)\qquad y_1 u + y_2 v - y_3 w = 0$$

über. Aus (2) folgt mit Rücksicht auf die Gleichungen (7) und (8) des vorigen § 3

$$y_3^2 - y_2^2 - y_1^2 = -x_1'^2 - x_2'^2 + x_3'^2,$$

also ist

$$y_3^2 - y_2^2 - y_1^2 = 1,$$

da doch x_1', x_2', x_3' Weierstraßsche homogene Koordinaten sind (§ 1, (1)). Demnach sind entweder y_1, y_2, y_3 oder $-y_1, -y_2, -y_3$ die Weierstraßschen homogenen Koordinaten eines Punktes Q in Bezug auf das System $\Omega O E$. Dieser Punkt Q liegt aber infolge (1*) auf der Geraden g, und zwar bei beliebiger Wahl der letzteren, die durch den Punkt P gelegt wird, deshalb fällt Q mit P zusammen. Die Werte y_1, y_2, y_3 oder $-y_1, -y_2, -y_3$ sind also mit x_1, x_2, x_3 der Reihe nach identisch, und es bestehen daher mit Rücksicht auf (2) die Formeln

$$(3)\qquad \begin{cases} x_1 = \varepsilon(a_{11}x_1' + a_{21}x_2' - a_{31}x_3'), \\ x_2 = \varepsilon(a_{12}x_1' + a_{22}x_2' - a_{32}x_3'), \\ x_3 = \varepsilon(-a_{13}x_1' - a_{23}x_2' + a_{33}x_3'), \end{cases}$$

wobei $\varepsilon = \pm 1$ ausfällt. Jedem Punkt P entspricht ein solches Vorzeichen ε, es muß aber noch bewiesen werden, daß es für jeden Punkt dasselbe ist, wie man erwartet.

Wir zeigen, daß es unter (3) für jeden Punkt P dasselbe $\varepsilon = \pm 1$ gilt, je nachdem die Koordinatensysteme $\Omega O \mathrm{E}$ und $\Omega' O' \mathrm{E}'$ gleichsinnig oder ungleichsinnig ausfallen.

Für den Beweis seien $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ die Weierstraßschen homogenen Koordinaten eines von P verschiedenen Punktes $\bar{P}$. Dann gelten neben (3) die entsprechenden Gleichungen

$$\bar{x}_1 = \bar{\varepsilon}\,(a_{11}\bar{x}'_1 + a_{21}\bar{x}'_2 - a_{31}\bar{x}'_3),$$
$$\bar{x}_2 = \bar{\varepsilon}\,(a_{12}\bar{x}'_1 + a_{22}\bar{x}'_2 - a_{32}\bar{x}'_3),$$
$$\bar{x}_3 = \bar{\varepsilon}\,(-a_{13}\bar{x}'_1 - a_{23}\bar{x}'_2 + a_{33}\bar{x}'_3),$$

und auf Grund der Gleichungen (7) und (8) im vorigen § 3 ergibt sich hieraus

$$x_3\bar{x}_3 - x_2\bar{x}_2 - x_1 x_1 = \varepsilon\bar{\varepsilon}(x'_3\bar{x}'_3 - x'_2\bar{x}'_2 - x'_1\bar{x}'_1). \tag{4}$$

Da aber hierbei der auf der linken Seite, sowie auf der rechten in Klammern stehende Ausdruck positiv ausfällt (§ 1, (7)), so ist $\varepsilon\bar{\varepsilon} > 0$, es bedeuten also ε und $\bar{\varepsilon}$ in den beiden Punkten gewiß dasselbe Vorzeichen. Wird nun (3) speziell auf den Punkt O' angewandt, dessen Koordinaten in Bezug auf das neue System $\Omega' O' \mathrm{E}'$ der Reihe nach $x'_1 = 0, x'_2 = 0, x'_3 = 1$ sind (§ 1, (8)), so erhält man aus der dritten Gleichung $x_3 = \varepsilon a_{33}$, d. h. mit Rücksicht auf die dritte Gleichung unter (3) im vorigen §

$$x_3 = \pm\, \varepsilon\, \frac{\alpha^2 + \gamma^2 + \beta^2 + \delta^2}{2},$$

wobei das Vorzeichen + oder — gilt, je nachdem das System $\Omega' O' \mathrm{E}'$ durch eine Bewegung bzw. Umwendung in $\Omega O \mathrm{E}$ übergeführt wird, oder mit anderen Worten die beiden Koordinatensysteme gleichsinnig oder ungleichsinnig ausfallen. Das hat wegen $x_3 > 0$ (§ 1, (2)) zur Folge, daß diesen zwei Fällen entsprechend auch $\varepsilon = \pm 1$ ist, wie behauptet wurde.

Wir haben somit folgendes Ergebnis gewonnen:

Sind x_1, x_2, x_3 die Weierstraßschen homogenen Koordinaten eines Punktes P in Bezug auf das Koordinatensystem $\Omega O \mathrm{E}$ und x'_1, x'_2, x'_3 die Koordinaten desselben bezüglich eines neuen Systems $\Omega' O' \mathrm{E}'$, so bestehen die Transformationsformeln

$$\left\{\begin{aligned} x_1 &= \pm\,(a_{11}x'_1 + a_{21}x'_2 - a_{31}x'_3),\\ x_2 &= \pm\,(a_{12}x'_1 + a_{22}x'_2 - a_{32}x'_3),\\ x_3 &= \pm\,(-a_{13}x'_1 - a_{23}x'_2 + a_{33}x'_3),\end{aligned}\right. \tag{3*}$$

wobei die Koeffizienten a_{jk} von P unabhängig, nämlich mit den obigen (§ 3, (3*)) *identisch sind, und das Zeichen + oder — gültig ist, je nachdem das neue Koordinatensystem mit dem ursprünglichen gleichsinnig oder ungleichsinnig ausfällt.*

Aus (3*) kann schon auf Grund der Formeln (9) des vorigen § durch eine leichte Überlegung gefolgert werden, daß *die neuen Weierstraßschen homogenen Koordinaten x'_1, x'_2, x'_3 durch die ursprünglichen x_1, x_2, x_3 ausgedrückt*

$$(5)\qquad \begin{cases} x'_1 = \pm(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3), \\ x'_2 = \pm(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3), \\ x'_3 = \pm(a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3), \end{cases}$$

sind, wobei das Zeichen + oder — zu nehmen ist, je nachdem die beiden Koordinatensysteme gleichen oder entgegengesetzten Drehungssinn haben. Es kann noch mit Rücksicht auf die Formel (6*) des vorigen § zusätzlich hinzugefügt werden, daß *die Determinante der Transformation* (5) *dem gültigen Vorzeichen entsprechend $\Delta = \pm 1$ ist.*

Die Formel (4) hat wegen $\varepsilon = \bar{\varepsilon} = \pm 1$ zur Folge, daß der Ausdruck $x_3\bar{x}_3 - x_2\bar{x}_2 - x_1\bar{x}_1$ gegen Koordinatentransformation invariant ist. Wird das neue Koordinatensystem $\Omega' O' E'$ so gewählt, daß O' mit dem Punkt $\bar{P}$ zusammenfällt und P auf der Halbgeraden $O'\Omega'$ liegt (Fig. 7), so sind die neuen Koordinaten dieser Punkte $\bar{x}'_1 = 0$, $\bar{x}'_2 = 0$, $\bar{x}'_3 = 1$ (§ 1, (8)) bzw. $x'_1 = \operatorname{sh} d$, $x'_2 = 0$, $x'_3 = \operatorname{ch} d$ (§ 1, (3)), also der fragliche Ausdruck

$$x'_3\bar{x}'_3 - x'_2\bar{x}'_2 - x'_1\bar{x}'_1 = \operatorname{ch} d.$$

Wir können somit wegen der Invarianz dieses Ausdruckes folgendes feststellen:

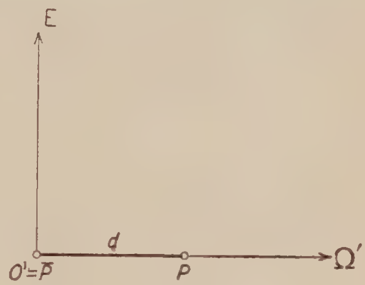

Fig. 7

Der Abstand d der Punkte P und $\bar{P}$ von den Weierstraßschen homogenen Koordinaten x_1, x_2, x_3 bzw. $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ *ist durch die Formel*

$$(6)\qquad \operatorname{ch} d = x_3\bar{x}_3 - x_2\bar{x}_2 - x_1\bar{x}_1$$

bestimmt.

Mit Hilfe dieser Formel kann die einfache geometrische Bedeutung der Koordinate x_3 gleich entdeckt werden. Wird nämlich neben dem Punkt $P(x_1, x_2, x_3)$ als zweiter Punkt der Ursprung des Koordinatensystems $\bar{P} = O$ gewählt, dessen Koordinaten $\bar{x}_1 = 0$, $\bar{x}_2 = 0$, $\bar{x}_3 = 1$ sind (§ 1, (8)), so lehrt die Formel (6) folgendes:

Die dritte Koordinate des Punktes P ist mit dem Abstand $\overline{OP} = d$ ausgedrückt

$$(7)\qquad x_3 = \operatorname{ch} d.$$

§ 5. Der Abstand eines Punktes von einer Geraden

Es seien x_1, x_2, x_3 die Weierstraßschen homogenen Koordinaten eines Punktes P und u, v, w die Linienkoordinaten einer gerichteten Geraden g. Hat ein neues Koordinatensystem $\Omega' O' \mathrm{E}'$ dasselbe Drehungssinn wie das ursprüngliche System $\Omega O \mathrm{E}$, so ist nach den Formeln der Transformation der Linien- bzw. Punktkoordinaten (§ 3, (3*), § 4, (5))

$$u' x_1' + v' x_2' - w' x_3' = (a_{11} u + a_{12} v + a_{13} w)(a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3) +$$
$$+ (a_{21} u + a_{22} v + a_{23} w)(a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3) -$$
$$- (a_{31} u + a_{32} v + a_{33} w)(a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3).$$

Es besteht also auf Grund der Gleichungen (4) und (5) des § 3 die Formel

(1) $$u' x_1' + v' x_2' - w' x_3' = u x_1 + v x_2 - w x_3.$$

Der Ausdruck $u x_1 + v x_2 - w x_3$ ist demnach gegen Koordinatentransformation bei Beibehaltung des Drehungssinnes invariant. Dieser Ausdruck hat eine einfache geometrische Bedeutung. Um sie zu bestimmen, werde das neue Koordinatensystem $\Omega' O' \mathrm{E}'$ so gewählt, wie es an der Figur 8 zu sehen ist. Wir nehmen zunächst an, daß P auf der positiven Seite der Geraden g liegt,

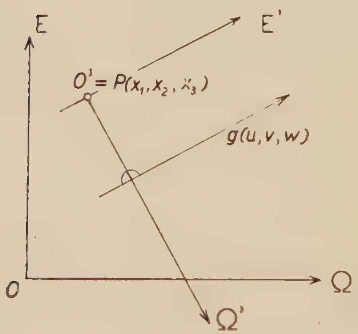

Fig. 8

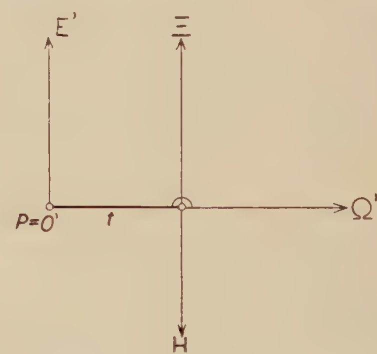

Fig. 9

und es sei t der Abstand dieses Punktes von g. Die Fernpunkte Ξ, H der Geraden g (wobei Ξ in die positive, H in die negative Richtung gefallen sei) haben in Bezug auf das neue System $\Omega' O' \mathrm{E}'$ (Fig. 9) offenbar die Koordinaten $\xi = e^t$, $\eta = -e^t$, wobei $t > 0$ ausfällt (§ 1, (9)). Die Weierstraßschen homogenen Linienkoordinaten von g sind also in diesem neuen System (§ 2, (4))

$$u' = \cdots, \quad v' = \cdots, \quad w' = \frac{\xi\eta + 1}{\xi - \eta} = \frac{-e^{2t} + 1}{2e^t} = -\operatorname{sh} t$$

und die Koordinaten von P (§ 1, (8))

$$x_1' = 0, \qquad x_2' = 0, \qquad x_3' = 1.$$

Demnach ist auf Grund von (1) der fragliche Ausdruck

$$u x_1 + v x_2 - w x_3 = \operatorname{sh} t.$$

Liegt P auf der negativen Seite von g, d. h. auf der positiven Seite der entgegengesetzt gerichteten Geraden von den Linienkoordinaten $-u, -v, -w$, so ist nach dieser Formel

$$-u x_1 - v x_2 + w x_3 = \operatorname{sh} t.$$

Zusammengefaßt können wir dieses Ergebnis so ausdrücken:

Sind x_1, x_2, x_3 die Weierstraßschen homogenen Koordinaten eines Punktes P und u, v, w die Linienkoordinaten einer gerichteten Geraden g, und wird der Abstand t dieses Punktes von dieser Geraden positiv oder negativ genommen, je nachdem P auf der positiven oder negativen Seite von g liegt, so besteht die Formel

(2) $$\operatorname{sh} t = u x_1 + v x_2 - w x_3.$$

Diese Formel (2) ist geeignet, die einfache geometrische Bedeutung der Koordinaten x_1, x_2 zu entdecken. Da nämlich der Fernpunkt E offenbar die Koordinate $\xi = 1$ hat und folglich die Koordinate des anderen Fernpunktes der Geraden OE $\eta = -1$ ausfällt, so sind die Linienkoordinaten dieser nach E gerichteten Geraden der Reihe nach $-1, 0, 0$ (§ 2, (4)). Wird also der Abstand des Punktes $P(x_1, x_2, x_3)$ von der Geraden OE mit $-a$ bezeichnet, so ist nach (2) $-x_1 = \operatorname{sh}(-a)$, d. h. $x_1 = \operatorname{sh} a$. Und da der andere Fernpunkt der Geraden $O\Omega$ die Koordinate 0 hat, also die Linienkoordinaten dieser nach Ω gerichteten Geraden der Reihe nach $0, 1, 0$ sind (§ 2, (5)), so besteht für den Abstand b des Punktes P von $O\Omega$ im Sinne von (2) $x_2 = \operatorname{sh} b$.

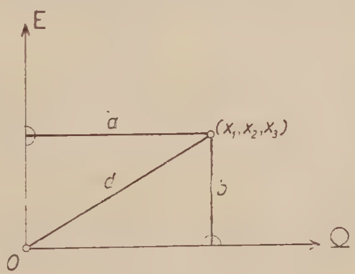

Fig. 10

Mit Rücksicht auf die Formel (7) des vorigen § können wir also über die geometrische Bedeutung der Weierstraßschen homogenen Koordinaten eines Punktes zusammenfassend folgendes feststellen:

Wird es im Koordinatensystem $\Omega O E$ der Abstand eines Punktes von der Achse OE mit a, von der anderen Achse $O\Omega$ mit b, und vom Ursprung O mit d bezeichnet, und zwar a an der rechten Seite von OE, b an der oberen Seite von $O\Omega$ positiv, und an der anderen negativ genommen, so sind die im § 1 unter (3) definierten Weierstraßschen homogenen Koordinaten dieses Punktes

(3) $$x_1 = \operatorname{sh} a, \qquad x_2 = \operatorname{sh} b, \qquad x_3 = \operatorname{ch} d$$

(Fig. 10).

§ 6. Die geometrische Bedeutung des Ausdruckes $u_1 u_2 + v_1 v_2 - w_1 w_2$ in Bezug auf zwei Geraden

Wir betrachten nun zwei voneinander verschiedene gerichtete Geraden g_1, g_2, die im Koordinatensystem $\Omega O \mathrm{E}$ die Weierstraßschen homogenen Linienkoordinaten u_1, v_1, w_1 bzw. u_2, v_2, w_2 haben. Auf Grund der Formeln unter (3*) im § 3 und mit Rücksicht auf die Gleichungen unter (4) und (5) in demselben § ist der Ausdruck $u_1 u_2 + v_1 v_2 - w_1 w_2$ gegen Koordinatentransformation invariant. Es sind bezüglich der geometrischen Bedeutung dieses Ausdruckes drei Fälle zu unterscheiden.

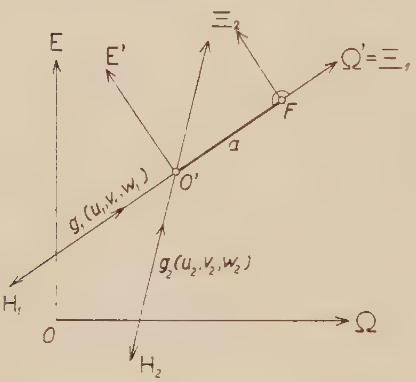

Fig. 11

1° Fall. Die Geraden g_1, g_2 schneiden einander.

Das neue Koordinatensystem $\Omega' O' \mathrm{E}'$ werde so gewählt, wie es die Figur 11 zeigt. Die Fernpunkte von g_2 seien Ξ_2, H_2, wobei Ξ_2 in die positive Richtung fällt, und die von g_1 seien entsprechend $\Xi_1 = \Omega', \mathrm{H}_1$. Von Ξ_2 werde auf g_2 das Lot gefällt, und der Fußpunkt F desselben habe von O' den Abstand a, mit Vorzeichen genommen. Dann sind im neuen System $\Omega' O' \mathrm{E}'$ die Koordinaten der Fernpunkte Ξ_2, H_2 der Reihe nach $\xi_2 = e^a$, $\eta_2 = -e^{-a}$ (§ 1, (9)), also werden die neuen Linienkoordinaten der Geraden g_2 (§ 2, (4))

$$u_2' = \cdots, \quad v_2' = \frac{e^a - e^{-a}}{e^a + e^{-a}} = \operatorname{th} a, \quad w_2' = \cdots,$$

während die von g_1

$$u_1' = 0, \qquad v_1' = 1, \qquad w_1' = 0$$

sind (§ 2, (5)), da doch der zweite Fernpunkt H_1 dieser letzteren Geraden auf diesem neuen System bezogen die Koordinate $\eta_1 = 0$ hat. Also folgt

$$u_1' u_2' + v_1' v_2' - w_1' w_2' = \operatorname{th} a,$$

und wir haben somit wegen der Invarianz des fraglichen Ausdrucks folgendes Resultat gewonnen:

Für einander schneidende Geraden g_1, g_2 hat man

$$u_1 u_2 + v_1 v_2 - w_1 w_2 = \operatorname{th} a, \tag{1}$$

wobei a den vom Schnittpunkt der beiden Geraden gerechneten Abstand des Fußpunktes desjenigen Lotes bedeutet, welches von dem in die positive Richtung fallenden Fernpunkt der Geraden g_2 auf g_1 gefällt wird (Fig. 11).

2° *Fall.* Die Geraden g_1, g_2 haben ein gemeinsames Lot und sind gleichgerichtet.

Es sei $a>0$ der zwischen g_1 und g_2 fallende Teil des gemeinsamen Lotes, und das neue System $\Omega' O' E'$ werde so gewählt, wie es die Figur 12 andeutet. In diesem neuen Koordinatensystem haben die Fernpunkte der Geraden g_1 die Koordinaten $\xi_1=1$, $\eta_1=-1$, während die Koordinaten der

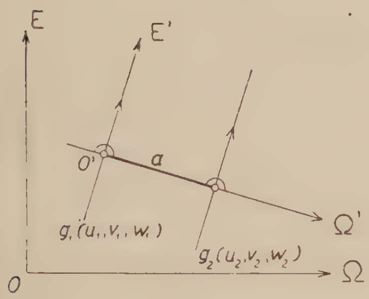

Fig. 12

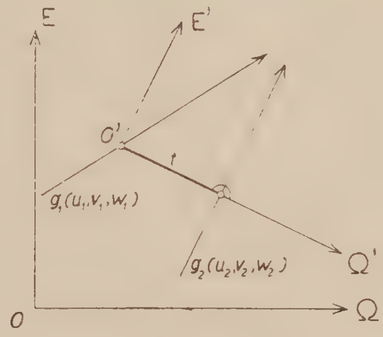

Fig. 13

Fernpunkte von g_2 entsprechend $\xi_2=e^a$, $\eta_2=-e^a$ sind (§ 1, (9)). Die neuen Linienkoordinaten sind mithin

$$u_1'=-1, \qquad v_1'=0, \qquad w_1'=0$$

bzw.

$$u_2'=\frac{-e^{2a}-1}{2e^a}, \quad v_2'=\cdots, \quad w_2'=\cdots,$$

also ist

$$u_1'u_2'+v_1'v_2'-w_1'w_2'=\frac{e^{2a}+1}{2e^a}=\operatorname{ch} a.$$

Wegen der Invarianz des fraglichen Ausdruckes kann demnach folgendes festgestellt werden:

Haben die Geraden g_1, g_2 ein gemeinsames Lot und sind sie gleichgerichtet, so ist

(2) $$u_1u_2+v_1v_2-w_1w_2=\operatorname{ch} a,$$

wobei a den Abstand der Schnittpunkte dieser Geraden mit ihrem gemeinsamen Lot bedeutet (Fig. 12).

3° *Fall.* Die Geraden g_1, g_2 sind hyperbolisch parallel und gleichgerichtet.

Es kann offenbar angenommen werden, daß die beiden Geraden nach dem gemeinsamen Fernpunkt gerichtet sind. In diesem Falle werde das neue Koordinatensystem so gewählt, wie es an der Figur 13 zu sehen ist. Wird

das von O' auf g_2 gefälltes Lot als positive Strecke mit t bezeichnet, so hat in diesem neuen System $\Omega' O' E'$ der gemeinsame Fernpunkt der beiden Geraden die Koordinate $\xi_1 = \xi_2 = e^t$ und der andere Fernpunkt von g_1 die Koordinate $\eta_1 = -e^{-t}$, während die des zweiten Fernpunktes von g_2 offenbar $\eta_2 = -e^t$ ausfällt (§ 1, (9)). Demzufolge sind die neuen Linienkoordinaten dieser Geraden (§ 2, (4))

$$u_1' = \frac{-2}{e^t + e^{-t}}, \quad v_1' = \cdots, \quad w_1' = 0$$

bzw.

$$u_2' = \frac{-e^{2t} - 1}{2e^t} = -\operatorname{ch} t, \quad v_2' = 0, \quad w_2' = \cdots,$$

woraus sich

$$u_1' u_2' + v_1' v_2' - w_1' w_2' = 1$$

ergibt. Wegen der Invarianz dieses Ausdruckes sind wir somit in diesem dritten Falle zum folgenden Resultat gekommen:

Es besteht für hyperbolisch parallele und gleichgerichtete Geraden g_1, g_2 *die Gleichung*

(3) $$u_1 u_2 + v_1 v_2 - w_1 w_2 = 1.$$

Aus den gewonnenen Formeln (1), (2) und (3) kann mit Rücksicht auf den Verlauf der Funktionen $\operatorname{ch} t$ und $\operatorname{th} t$ folgendes gefolgert werden:

Die in Weierstraßschen homogenen Linienkoordinaten gegebenen Geraden $g_1(u_1, v_1, w_1)$ *und* $g_2(u_2, v_2, w_2)$

1. *schneiden einander dann und nur dann, wenn*

$$|u_1 u_2 + v_1 v_2 - w_1 w_2| < 1$$

ausfällt, insbesondere stehen sie nur dann aufeinander senkrecht, falls

$$u_1 u_2 + v_1 v_2 - w_1 w_2 = 0$$

ist;

2. *haben ein gemeinsames Lot dann und nur dann, wenn*

$$|u_1 u_2 + v_1 v_2 - w_1 w_2| > 1$$

ausfällt;

3. *sind hyperbolisch parallel dann und nur dann, falls die Gleichung*

$$u_1 u_2 + v_1 v_2 - w_1 w_2 = \pm 1$$

besteht.

*

Wie man sieht, haben wir durch die Erörterungen der §§ 1—6 die analytische Geometrie der hyperbolischen Ebene begründet, und zwar ohne Verwendung der hyperbolischen Trigonometrie.

Es ist auch nicht schwer, die homogenen Koordinaten von Fernpunkten und von *idealen Punkten* einzuführen, sowie den Begriff der *idealen Geraden* bzw. *Randgeraden* analytisch zu erklären. Die Identität der hyperbolischen Geometrie der Ebene mit dem bekannten Klein—Hilbertschen Kreismodell, ist sodann eine Folge dieser analytischen Geometrie.

Wir bemerken noch, daß auf Gründ der sogenannten *Endenrechnung* von D. HILBERT,[5] die analytische Geometrie der hyperbolischen Ebene, von der Stetigkeit unabhängig, in ganz ähnlicher Weise aufgebaut werden kann.

(Eingegangen am 2. Januar 1957.)

[5] D. HILBERT, Neue Begründung der Bolyai—Lobatschefskyschen Geometrie, *Mathematische Annalen*, **57** (1903), S. 137—150, oder *Grundlagen der Geometrie* (Leipzig und Berlin, 1930), 7. Aufl., Anhang III, S. 159—177, insbesondere §§ 2—3, S. 145—149 bzw. 170—174.

DIE HYPERBOLISCHE TRIGONOMETRIE ALS FOLGE DER ANALYTISCHEN GEOMETRIE DER HYPERBOLISCHEN EBENE

Von

PAUL SZÁSZ (Budapest)

(*Vorgelegt von* G. HAJÓS)

In der vorangehenden Arbeit[1] habe ich die analytische Geometrie der hyperbolischen Ebene mit den klassischen Hilfsmitteln, d. h. durch Anwendung der *hyperbolischen Parallelen* und des *Grenzkreises* begründet, ohne von der Trigonometrie dieser Ebene Gebrauch zu machen. Letztere kann mit denselben Hilfsmitteln in der Ebene selbständig hergeleitet werden, das wurde erstmalig von H. LIEBMANN[2] erkannt und dargetan. Sie ist aber auch als Folgerung in der nach meiner Methode begründeten analytischen Geometrie der hyperbolischen Ebene enthalten, wie ich in dem zitierten Aufsatz schon bemerkt habe.[3] Das zu zeigen, ist das Ziel der vorliegenden Note. Dabei setze ich meine genannte Arbeit als bekannt voraus.

Zunächst wende ich mich der Herleitung der hyperbolischen *Streckentrigonometrie* zu.

Es werde ein bei C rechtwinkliges Dreieck ABC mit den Bestimmungsstücken

$$\overline{BC}=a, \qquad \overline{CA}=b, \qquad \overline{AB}=c,$$
$$\sphericalangle A=\lambda, \qquad \sphericalangle B=\mu$$

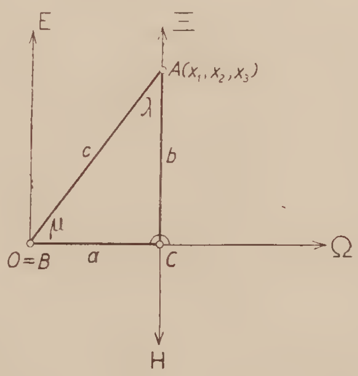

Fig. 1

betrachtet. Das Koordinatensystem $\Omega O E$ sei so gewählt, wie es an der Fig. 1 zu sehen ist. Die Fernpunkte Ξ, H der Geraden AC haben dann die Koordinaten $\xi=e^a$, $\eta=-e^a$ (a. a. O.[1], § 1, (9)) und für die Weierstraßschen homogenen Koordinaten x_1, x_2, x_3 von A ist $x_3=\operatorname{ch} c$ (a. a. O.[1], § 4, (7)). Es besteht deshalb im Sinne der Gleichung dieser Geraden ΞH (a. a. O.[1], § 2, (2))

$$(-e^{2a}-1)\,x_1+0\cdot x_2-(-e^{2a}+1)\operatorname{ch} c=0,$$

[1] PAUL SZÁSZ, Begründung der analytischen Geometrie der hyperbolischen Ebene mit den klassischen Hilfsmitteln, unabhängig von der Trigonometrie dieser Ebene, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **8** (1957), S. 139—157.

[2] H. LIEBMANN, Elementare Ableitung der nichteuklidischen Trigonometrie, *Berichte über die Verhandlungen der Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Math.-phys. Klasse*, **59** (1907), S. 187—210.

[3] Siehe a. a. O.[1], Einleitung.

woher sich

$$x_1 = \frac{e^{2a}-1}{e^{2a}+1}\operatorname{ch} c = \operatorname{th} a \operatorname{ch} c \tag{1}$$

ergibt. Werden nun dieser Wert von x_1 und die Werte $x_2 = \operatorname{sh} b$, $x_3 = \operatorname{ch} c$ (a. a. O.[1], § 5, (3)) in die Gleichung

$$x_3^2 - x_2^2 - x_1^2 = 1$$

(a. a. O.[1], § 1, (1)) eingesetzt, so erhält man

$$\operatorname{ch}^2 c - \operatorname{sh}^2 b - \operatorname{th}^2 a \operatorname{ch}^2 c = 1,$$

woraus nach geeigneter Umformung durch Wurzelausziehung

$$\operatorname{ch} c = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b \tag{I}$$

folgt.

Bezeichnet ferner m den Abstand, dem der Winkel μ als Parallelwinkel angehört, so sind die Koordinaten der Fernpunkte Ξ', H' der Geraden AB (Fig. 2) $\xi' = e^m$ und $\eta' = -e^{-m}$ (a. a. O.[1], § 1, (9) und Hilfssatz 2). Da weiter $x_2 = \operatorname{sh} b$ ausfällt (a. a. O.[1], § 5, (3)), so ist nach der Gleichung dieser Geraden $\Xi'\mathrm{H}'$

$$-2x_1 + (e^m - e^{-m}) \operatorname{sh} b - 0 \cdot x_3 = 0,$$

d. h.

$$x_1 = \operatorname{sh} b \operatorname{sh} m. \tag{2}$$

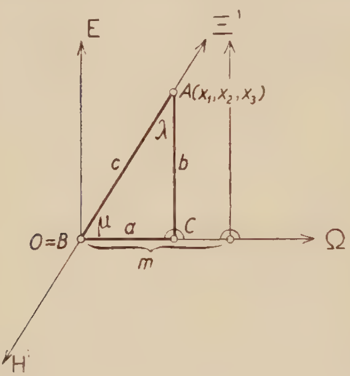

Fig. 2

Durch Verwendung von (I) ist aber

$$\operatorname{th}^2 a = 1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 a} = 1 - \frac{\operatorname{ch}^2 b}{\operatorname{ch}^2 c},$$

(1) und (2) ergeben also

$$\operatorname{ch}^2 c - \operatorname{ch}^2 b = \operatorname{sh}^2 b \operatorname{sh}^2 m.$$

Nach einer leichten Umformung und darauffolgende Wurzelausziehung erhält man daraus

$$\frac{\operatorname{sh} b}{\operatorname{sh} c} = \frac{1}{\operatorname{ch} m}. \tag{II}$$

Diese Formeln (I) und (II) haben schon die ganze hyperbolische Streckentrigonometrie zur Folge.

Um die gewöhnliche hyperbolische Trigonometrie zu gewinnen, ist nur noch die Bestimmung des Parallelwinkels als Funktion des Lotes nötig, d. h. die Herleitung der klassischen Formel

$$\operatorname{ctg} \frac{\mu}{2} = e^m, \tag{3}$$

welche übrigens mit den Formeln

$$(4) \qquad \sin\mu = \frac{1}{\operatorname{ch} m}, \qquad \cos\mu = \operatorname{th} m, \qquad \operatorname{tg}\mu = \frac{1}{\operatorname{sh} m}$$

äquivalent ist. Im Besitze der analytischen Geometrie der hyperbolischen Ebene, die ich in der von mir gegebenen Begründung hierbei vorausgesetzt habe, ist das kein Problem. Die Identität der hyperbolischen Geometrie der Ebene mit dem bekannten Klein—Hilbertschen Kreismodell[4] ist nämlich eine

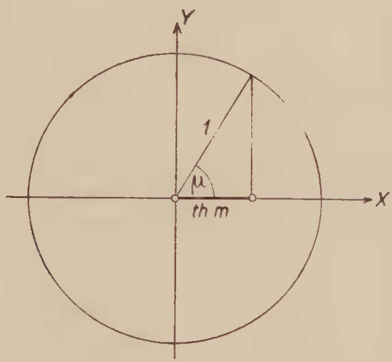

Fig. 3

Folge dieser analytischen Darstellung, und die zweite Formel unter (4) ist an diesem Modell unmittelbar abzulesen (Fig. 3).[5]

Die Formeln der Streckentrigonometrie gehen nunmehr auf Grund von (3) bzw. (4) in die der gewöhnlichen hyperbolischen Trigonometrie über. Insbesondere nimmt die Formel (II) die Gestalt

$$(\mathrm{II}^*) \qquad \frac{\operatorname{sh} b}{\operatorname{sh} c} = \sin\mu$$

an.

(Eingegangen am 25. Januar 1957.)

[4] F. Klein, Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie, *Mathematische Annalen*, **4** (1871), S. 573—625, insbesondere S. 620—621; oder *Gesammelte Mathematische Abhandlungen. I*, (Berlin, 1921), S. 254—305, insbesondere S. 300—301; ferner D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie* (Leipzig und Berlin, 1930), 7. Aufl., S. 38.

[5] Für eine äußerst einfache direkte Herleitung der Formel (3) siehe Paul Szász, Neue Bestimmung des Parallelwinkels in der hyperbolischen Ebene mit den klassischen Hilfsmitteln, *Acta Sci. Math.*, **14** (1952), S. 247—251.

BEMERKUNG ÜBER DIE VERTEILUNG DER ZIFFERN IN DER CANTORSCHEN REIHE REELLER ZAHLEN

Von

P. SZÜSZ (Budapest)

(*Vorgelegt von* A. Rényi)

Unter der Cantorschen Reihe (vgl. z. B. Perron [2]) einer reellen Zahl x $(0 < x < 1)$ versteht man die Reihe

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k(x)}{q_1 q_2 \ldots q_k}, \tag{1}$$

wobei $q_1, q_2, \ldots$ eine vorgegebene Folge natürlicher Zahlen mit $q_k \geqq 2$ ist, während die $\varepsilon_k(x)$ von x abhängen und jedes $\varepsilon_k(x)$ die Werte $0, 1, \ldots, q_k - 1$ annehmen kann.

A. Rényi [1] hat bewiesen, daß in der Reihe (1) unter gewissen Bedingungen jede Ziffer „gleich wahrscheinlich" ist. Sein Satz lautet folgendermaßen:

Die Grundzahlenfolge $q_1, q_2, \ldots$ genüge der folgenden Bedingung:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{q_k} = \infty$.

Es bezeichne $N_n(x, r)$ die Anzahl der $\varepsilon_k(x) = r$ $(k \leqq n)$. Dann gilt für fast alle x (d. h. für alle Zahlen x des Intervalls $(0, 1)$ bis auf eine Nullmenge) und für nichtnegative ganze r und s, für welche mit Ausnahme von endlich vielen Werten von k, $q_k \geqq \max(r, s)$ ist, die Relation

$$\lim_{n \to \infty} \frac{N_n(x, r)}{N_n(x, s)} = 1. \tag{2}$$

Daraus folgt, daß, falls die Folge $\{q_k\}$ außer a) auch der Bedingung

b) $q_k \to \infty$

genügt, (2) für jedes nichtnegative ganze r und s gilt.

Dieser Satz ist eine Verallgemeinerung des bekannten Borelschen Satzes über die Verteilung der Ziffern in der q-adischen Entwicklung reeller Zahlen (Borel [4]). Der Borelsche Spezialfall bezieht sich auf den Fall $q_1 = q_2 = \cdots = q$.

Da die Basen der q-adischen Entwicklungen nur natürliche Zahlen $\geqq 2$ sein können, also jedenfalls eine abzählbare Menge bilden, kann der Borel-

sche Satz etwas allgemeiner folgendermaßen ausgesprochen werden: Es sei

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_k(x)}{q^k} \qquad (\varepsilon_k(x)=0,1,\ldots,q-1;\ k=1,2,\ldots) \tag{3}$$

und es bezeichne $N_n(x,r)$ die Anzahl der $\varepsilon_k(x)=r$ $(k\leqq n)$. Dann gilt für beliebiges r und s und für fast alle x die Relation (2), wobei *für q jede natürliche Zahl $\geqq 2$ zugelassen ist.*

In der Arbeit [1] hat A. RÉNYI darauf hingewiesen, daß sich diese Verallgemeinerung des Borelschen Satzes auf allgemeine Cantorsche Entwicklungen nicht übertragen läßt. Die wörtliche Übertragung würde nämlich folgendermaßen lauten: Es bezeichne $N_n(x,r)$ die Anzahl der $\varepsilon_k(x)=r$ $(k\leqq n)$ in der Reihe (1). Dann gilt (2) für fast alle x auch dann, wenn $q_1,q_2,\ldots$ eine den Bedingungen a) und b) genügende, aber sonst beliebige Grundzahlenfolge bedeutet.

Der Grund dafür, daß dies nicht wahr ist, besteht darin, daß die Menge der den Bedingungen a) und b) genügenden Zahlenfolgen $q_1,q_2,\ldots$ von der Mächtigkeit des Kontinuums ist. RÉNYI [1] hat gezeigt, daß vielmehr der folgende Satz gilt:

SATZ 1. *Es sei x eine beliebige Zahl des Intervalls* (0, 1). *Dann gibt es eine den Bedingungen* a) *und* b) *genügende Zahlenfolge $q_1,q_2,\ldots$ derart, daß für die Cantorsche Reihe nach dieser Grundzahlenfolge der Zahl x die Relation* (2) *nicht für jedes $r\geqq 0$ und $s\geqq 0$ zustimmt.*

Der Rényische Beweis dieses Satzes beruht auf einem Gedanken von P. ERDŐS. Die Konstruktion liefert zwar eine Zahlenfolge $q_1,q_2,\ldots$, die a) und b) genügt, weitere Eigenschaften können jedoch nicht gesichert werden. Es kann z. B. durch die Erdős—Rényische Konstruktion nicht gesichert werden, daß die Zahlenfolge $q_1,q_2,\ldots$, deren Existenz durch Satz 1 gesichert wird, monoton zunehmend ist, oder eine vorgeschriebene Wachstumsordnung besitzt. Ich gebe daher eine Verschärfung des Satzes 1, die einerseits besagt, daß man die Glieder der der Behauptung des Satzes 1 genügenden Zahlenfolge (bis auf das erste Glied) „lokalisieren" kann, andererseits daß man die Forderung „(2) wird nicht für alle r und s erfüllt" durch die stärkere Beschränkung „es gilt stets $\varepsilon_k(x)=1$" ersetzen kann. Mit anderen Worten: die Ziffer 0 kommt gar nicht vor. Ich beweise genauer den folgenden

SATZ 2. *Es sei x beliebig mit $0<x<1$ und $c_1,c_2,\ldots$ eine beliebige vorgegebene Folge natürlicher Zahlen mit $c_k\geqq 2$* $(k=1,2,\ldots)$. *Dann gibt es eine Grundzahlenfolge $q_1,q_2,\ldots$ derart, daß*

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_k(x)}{q_1q_2\ldots q_k}, \tag{4}$$

wobei

(5) $$0 \leqq q_k - c_k < 16 \qquad (k = 2, 3, \ldots)$$

und

(6) $$1 \leqq \varepsilon_k(x) \leqq q_k - 1 \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

BEWEIS. Zunächst brauche ich eine rekurrente Formel. Es gelte (4) für eine beliebige gegebene Zahlenfolge $q_1, q_2, \ldots$ mit $0 \leq \varepsilon_k(x) \leq q_k - 1$. Dann ist

$$0 \leqq x - \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon_k(x)}{q_1 q_2 \ldots q_k} < \frac{1}{q_1 q_2 \ldots q_n},$$

(7) $$0 \leqq q_n \left(q_1 q_2 \ldots q_{n-1} \left(x - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\varepsilon_k(x)}{q_1 q_2 \ldots q_k} \right) \right) - \varepsilon_n(x) < 1,$$

also

(8) $$\varepsilon_n(x) = \left[q_n \left(q_1 q_2 \ldots q_{n-1} \left(x - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\varepsilon_k(x)}{q_1 q_2 \ldots q_k} \right) \right) \right].$$

Setzt man

(9) $$q_1 q_2 \ldots q_n \left(x - \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon_k(x)}{q_1 q_2 \ldots q_k} \right) = \delta_n,$$

so wird wegen (7) und (8)

(10) $$\varepsilon_n(x) = [q_n \delta_{n-1}]$$

und

(11) $$\delta_n = (q_n \delta_{n-1}),$$

wobei $[\ldots]$ den ganzen Teil und $(\ldots)$ den Bruchteil der in Klammern stehenden Zahl bedeutet.

Ferner benötige ich den folgenden einfachen

HILFSSATZ. *Es sei β eine reelle Zahl mit $0 < \beta < 1$, ferner sei*

(12) $$\beta = \frac{A}{B} + \frac{\vartheta}{B^2} \quad (A, B \text{ ganz}, \ (A, B) = 1, \ |\vartheta| < 1).$$

Dann gilt für jedes ganze n und für $k = 1, 2, \ldots, B$

(13) $$((n+k)\beta) = \left(\delta(n) + \frac{\psi(k)}{B} + \frac{k\vartheta}{B^2} \right),$$

wobei $\delta(n)$ eine von n und B abhängige positive Zahl ist, die jedenfalls kleiner als $\frac{1}{B}$ ist, während $\psi(k)$ $(k = 1, 2, \ldots, B)$ eine Permutation der Zahlen $1, 2, \ldots, B$ bedeutet.

Der Beweis dieses Hilfssatzes ergibt sich sofort aus (12) und aus der Tatsache, daß für teilerfremde A und B mit k auch $Ak+l$ ein vollständiges Restsystem (mod B) durchläuft, wobei l eine beliebige ganze Zahl ist.

Nun sind wir in der Lage, die Konstruktion, die den Beweis des Satzes 2 vollendet, durchzuführen.

Zunächst wählen wir ein q_1 $(q_1 \geqq 2)$ derart, daß

$$\frac{1}{8} < \delta_1 < \frac{7}{8} \tag{14}$$

erfüllt wird, wobei δ_1 (und im weiteren $\delta_2, \delta_3, \ldots$) die Bedeutung (9) hat. Wegen $0 < x < 1$ ist dies sicher möglich. Es bezeichne $\frac{A_r^{(1)}}{B_r^{(1)}}$ denjenigen Näherungsbruch der Kettenbruchentwicklung von δ_1 (bereits in irreduzibler Gestalt geschrieben), für welchen

$$B_r^{(1)} < 8 \leqq B_{r+1}^{(1)} \tag{15}$$

gilt.

Bekanntlich gilt[1]

$$\left|\delta_1 - \frac{A_r^{(1)}}{B_r^{(1)}}\right| < \frac{1}{B_r^{(1)} B_{r+1}^{(1)}}, \tag{16}$$

also wegen (15) jedenfalls

$$\left|\delta_1 - \frac{A_r^{(1)}}{B_r^{(1)}}\right| < \frac{1}{8 B_r^{(1)}}. \tag{17}$$

Aus (15) und (17) folgt

$$B_r^{(1)} \geqq 2. \tag{18}$$

Wäre nämlich $B_r^{(1)} = 1$, so würde aus (17)

$$\left|\delta_1 - A_r^{(1)}\right| \leqq \frac{1}{8}$$

folgen, was (14) widerspricht.

Nun unterscheiden wir zwei Fälle, je nachdem $B_r^{(1)} \leqq 3$ oder $B_r^{(1)} \geqq 4$ ist:

a) Es sei $B_r^{(1)} \leqq 3$, also $B_r^{(1)} = 2$ oder 3. Dann folgt aus (15) und (16)

$$\left|\delta_1 - \frac{A_r^{(1)}}{B_r^{(1)}}\right| \leqq \frac{3}{8} \frac{1}{B_r^{(1)2}}.$$

Hieraus folgt wegen des Hilfssatzes, daß für ein beliebiges Teilintervall I von

[1] Vgl. z. B. Perron [3], S. 43.

(0,1) von der Länge $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{8}=\frac{11}{16}$ eine der Zahlen

$$((c_2+8)\,\delta_1),\quad ((c_2+9)\,\delta_1),\quad ((c_2+10)\,\delta_1)$$

dem Intervall I angehört, wobei c_2 eine beliebige ganze Zahl ist. Es bezeichne q_2 diejenige der Zahlen c_2+8, c_2+9, c_2+10, für welche die Ungleichung

$$\frac{1}{8}<(q_2\,\delta_1)<\frac{7}{8}$$

oder wegen (11) die Ungleichung

$$\frac{1}{8}<\delta_2<\frac{7}{8} \tag{19}$$

gilt. Es gilt jedenfalls

$$0<q_2-c_2\leqq 10, \tag{20}$$

ferner wegen (10), (14) und $q_2\geqq 8$ auch $\varepsilon_2(x)=[q_2\,\delta_1]\geqq 1$.

b) Nun nehmen wir an, daß $B_r^{(1)}\geqq 4$ ist. Dann gilt, ebenfalls wegen des Hilfssatzes, für eine der Zahlen $c_2+8, c_2+9, \ldots, c_2+B_r-1+8$, die ich mit q_2 bezeichne,

$$\frac{1}{8}<(q_2\,\delta_1)<\frac{7}{8},$$

also auch (19). Wegen (15) gilt

$$0\leqq q_2-c_2<16, \tag{21}$$

und wegen (14) und $q_2\geqq 8$ auch $\varepsilon_2(x)\geqq 1$.

Wegen (19) läßt sich unsere Konstruktion wiederholen. So erhalten wir der Reihe nach die Zahlen $q_3, q_4, \ldots$, die (5) und (6) erfüllen. Damit ist unser Satz 2 bewiesen.

Es sei noch folgendes bemerkt: Die Konstante 16 in (5) läßt sich offenbar durch eine kleinere ersetzen. Es wäre interessant, die kleinste Zahl K zu bestimmen, die die Eigenschaft hat, daß sich zu jedem x und zu jeder Zahlenfolge $c_1, c_2, \ldots$ eine Grundzahlenfolge $q_1, q_2, \ldots$ mit (4), (6) und

$$0\leqq q_k-c_k\leqq K \qquad (k=2, 3, \ldots) \tag{5'}$$

angeben läßt.

BUDAPEST, FORSCHUNGSINSTITUT FÜR MATHEMATIK
DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

(Eingegangen am 4. Januar 1957.)

Literaturverzeichnis

[1] A. Rényi, Über die Verteilung der Ziffern in der Cantorschen Reihe reeller Zahlen, *Matematikai Lapok*, **7** (1956), S. 77—100 (ungarisch).
[2] O. Perron, *Irrationalzahlen* (Leipzig und Berlin, 1921).
[3] O. Perron, *Die Lehre von den Kettenbrüchen* (Leipzig und Berlin, 1929), II. Auflage.
[4] E. Borel, Sur les probabilités denombrables et leurs applications arithmétiques, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, **26** (1909), S. 247—271.

ON CERTAIN SOJOURN TIME PROBLEMS IN THE THEORY OF STOCHASTIC PROCESSES

By

L. TAKÁCS (Budapest)

(*Presented by* A. RÉNYI)

Introduction

Let us consider a stochastic process $\{\xi(t), 0 \leqq t < \infty\}$ whose random variables take on values in X where X is an arbitrary abstract space. Let B be a subset of the state space X. Define a new stochastic process $\{\chi(t), 0 \leqq t < \infty\}$ supposing

$$\chi(t) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad \xi(t) \in B, \\ 0 & \text{if} \quad \xi(t) \notin B. \end{cases}$$

Let us introduce the following random variable:

$$\beta(t) = \int_0^t \chi(u)\,du$$

if it exists. $\beta(t)$ yields the measure of the set consisting of those points u of the interval $(0, t)$ for which $\xi(u) \in B$. We shall investigate the distribution and the asymptotic distribution of the random variable $\beta(t)$ defined on a wide class of stochastic processes.

The mentioned problems were treated by A. N. KOLMOGOROV [7], R. L. DOBRUŠIN [2] in case of Markov chains, by F. I. KARPELEVICH and V. A. USPENSKY ([2], p. 296) in case of a certain Markov process, and by the author [8], [9], [10] in case of certain recurrent processes.

In the following we specialize the process $\{\xi(t), 0 \leqq t < \infty\}$. Let $X = A + B$ where A and B are disjoint sets. Suppose $\xi(0) \in A$. Then the process assumes alternatingly the states $A, B, A, B, A, \ldots$. Denote by $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, \xi_3, \ldots$ the times spent in states A and B, respectively. Suppose that $\{\xi_n\}$ and $\{\eta_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ are non-negative independent random variables with $\mathbf{P}\{\xi_n < x\} = G(x)$ and $\mathbf{P}\{\eta_n \leqq x\} = H(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Accordingly $G(x)$ is continuous on the left and $H(x)$ is continuous on the right.

Let us introduce some notations. Put $\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n = \zeta_n$ and $\eta_1 + \eta_2 + \cdots + \eta_n = \chi_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, further $\zeta_0 \equiv \chi_0 \equiv 0$. Denote by $\alpha(t)$ and $\beta(t)$ the total time spent in states A and B, respectively, during the time inter-

val $(0, t)$. Clearly $\alpha(t)+\beta(t)=t$. Let us put $\mathbf{P}\{\beta(t)\leqq x\}=\Omega(t,x)$, whence $\mathbf{P}\{\alpha(t)<x\}=1-\Omega(t,t-x)$.

Let us write

$$\alpha=\int_0^\infty x\,dG(x) \quad\text{and}\quad \beta=\int_0^\infty x\,dH(x),$$

further

$$\sigma_\alpha^2=\int_0^\infty (x-\alpha)^2\,dG(x) \quad\text{and}\quad \sigma_\beta^2=\int_0^\infty (x-\beta)^2\,dH(x).$$

Furthermore we define $F(x)=G(x)*H(x)$, i. e.

$$F(x)=\int_0^x G(x-y)\,dH(y).$$

§ 1. The distribution of $\beta(t)$

THEOREM 1. *The random variable $\beta(t)$ has the following distribution function:*

$$\Omega(t,x)=\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)[G_n(t-x)-G_{n+1}(t-x)], \tag{1}$$

where $H_n(x)$ $(n=1,2,\dots)$ denotes the n-th iterated convolution of the distribution function $H(x)$ with itself and $H_0(x)=1$ if $x\geqq 0$, $H_0(x)=0$ if $x<0$; and $G_n(x)$ is defined similarly, but $G_0(x)\equiv 1$.

PROOF. We need the following

LEMMA 1. *If χ and ζ are non-negative random variables, then we have*

$$\mathbf{P}\{\chi\leqq x, \zeta+\chi\leqq t\}-\mathbf{P}\{\zeta\geqq t-x, \zeta+\chi\leqq t\}=\mathbf{P}\{\chi\leqq x, \zeta<t-x\}. \tag{2}$$

To prove (2) we introduce the following events:

$$E_1\equiv\{\chi\leqq x\},\quad E_2\equiv\{\zeta<t-x\},\quad E\equiv\{\zeta+\chi\leqq t\}.$$

We can write

$$E_1E=E_1E_2E+E_1\bar{E}_2E.$$

Now $E_1E_2\subset E$, i. e. $E_1E_2E=E_1E_2$ and $\bar{E}_2E\subset E_1$, i. e. $E_1\bar{E}_2E=\bar{E}_2E$. Consequently

$$E_1E=E_1E_2+\bar{E}_2E$$

and the events on the right-hand side are exclusive events. Thus

$$\mathbf{P}\{E_1E\}=\mathbf{P}\{E_1E_2\}+\mathbf{P}\{\bar{E}_2E\}$$

which proves the lemma.

Now we pass to the proof of (1). The event $\beta(t) \leqq x$ can occur in the following mutually exclusive ways: at the instant t the system is in state A and the time interval $(0, t)$ contains n $(n=0, 1, 2, \ldots)$ complete B-intervals with total length $\chi_n \leqq x$ or at the instant t the system is in state B and the time interval $(0, t)$ contains n $(n=1, 2, 3, \ldots)$ complete A-intervals with total length $\zeta_n \geqq t-x$. Consequently, with the aid of the total probability theorem we can write

$$\Omega(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}\{\chi_n \leqq x, \zeta_n + \chi_n \leqq t < \zeta_{n+1} + \chi_n\} + \tag{3}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\{\zeta_n \geqq t-x, \zeta_n + \chi_{n-1} \leqq t < \zeta_n + \chi_n\}.$$

Here

$$\mathbf{P}\{\chi_n \leqq x, \zeta_n + \chi_n \leqq t < \zeta_{n+1} + \chi_n\} =$$
$$= \mathbf{P}\{\chi_n \leqq x, \zeta_n + \chi_n \leqq t\} - \mathbf{P}\{\chi_n \leqq x, \zeta_{n+1} + \chi_n \leqq t\}$$

and

$$\mathbf{P}\{\zeta_n \geqq t-x, \zeta_n + \chi_{n-1} \leqq t < \zeta_n + \chi_n\} =$$
$$= \mathbf{P}\{\zeta_n \geqq t-x, \zeta_n + \chi_{n-1} \leqq t\} - \mathbf{P}\{\zeta_n \geqq t-x, \zeta_n + \chi_n \leqq t\}.$$

Taking into consideration that $\zeta_0 \equiv 0$, for $0 \leqq x < t$ we have

$$\Omega(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} [\mathbf{P}\{\chi_n \leqq x, \zeta_n + \chi_n \leqq t\} - \mathbf{P}\{\zeta_n \geqq t-x, \zeta_n + \chi_n \leqq t\}] -$$
$$- \sum_{n=0}^{\infty} [\mathbf{P}\{\chi_n \leqq x, \zeta_{n+1} + \chi_n \leqq t\} - \mathbf{P}\{\zeta_{n+1} \geqq t-x, \zeta_{n+1} + \chi_n \leqq t\}].$$

Using Lemma 1 and the independence of the random variables ζ_n, χ_n $(n=0, 1, 2, \ldots)$ we have

$$\Omega(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} [\mathbf{P}\{\chi_n \leqq x, \zeta_n < t-x\} - \mathbf{P}\{\chi_n \leqq x, \zeta_{n+1} < t-x\}] =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}\{\chi_n \leqq x\} [\mathbf{P}\{\zeta_n < t-x\} - \mathbf{P}\{\zeta_{n+1} < t-x\}].$$

As $\mathbf{P}\{\chi_n \leqq x\} = H_n(x)$ and $\mathbf{P}\{\zeta_n < t-x\} = G_n(t-x)$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$, Theorem 1 is proved for $0 \leqq x < t$ and clearly $\Omega(t,t) = 1$.

REMARK 1. Denote by τ the least instant for which $\alpha(\tau) = t-x$. Then clearly $\xi(\tau) \in A$. What is the probability that under these conditions $\tau \leqq t$ or equivalently $\beta(\tau) \leqq x$? The probability in question is $\Omega(t, x)$. Namely, we can write easily[1]

$$\mathbf{P}\{\beta(\tau) \leqq x\} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}\{\chi_n \leqq x\} \cdot \mathbf{P}\{\zeta_n < t-x \leqq \zeta_{n+1}\}. \tag{4}$$

[1] *Note added in proof.* Since $\{\beta(\tau) \leqq x\} \equiv \{\alpha(\tau) + \beta(\tau) \leqq t\} \equiv \{\tau \leqq t\} \equiv \{\alpha(\tau) \leqq \leqq \alpha(t)\} \equiv \{\beta(t) \leqq x\}$, it follows immediately that $\mathbf{P}\{\beta(\tau) \leqq x\} = \mathbf{P}\{\beta(t) \leqq x\}$.

REMARK 2. Consider the special case

$$G(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{if } x \geqq 0, \\ 0 & \text{if } x < 0. \end{cases}$$

Then

$$\Omega(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda(t-x)} \frac{[\lambda(t-x)]^n}{n!} H_n(x).$$

If $t - x = a$ is fixed, then

$$\Omega(a+x, x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda a} \frac{(\lambda a)^n}{n!} H_n(x) \tag{5}$$

is in x a compound Poisson distribution introduced by A. KHINTCHINE [5]. The Laplace—Stieltjes transform of the distribution function $\Omega(a+x, x)$ is

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} d_x \Omega(a+x, x) = e^{-\lambda a [1-\psi(s)]} \tag{6}$$

where

$$\psi(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dH(x).$$

EXAMPLE 1. (Cf. F. I. KARPELEVICH and V. A. USPENSKY [2], p. 296.) Let $\{\xi(t), 0 \leqq t < \infty\}$ be a Markov process with two possible states A and B. Suppose that the transition probabilities are $\mathbf{P}\{\xi(t+\Delta t) \in B \mid \xi(t) \in A\} = \lambda \Delta t + o(\Delta t)$ and $\mathbf{P}\{\xi(t+\Delta t) \in A \mid \xi(t) \in B\} = \mu \Delta t + o(\Delta t)$. In this case $G(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ if $x \geqq 0$ and $H(x) = 1 - e^{-\mu x}$ if $x \geqq 0$. Further we have $\psi(s) = \mu/(\mu+s)$ and by (6)

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} d_x \Omega(a+x, x) = e^{-\frac{\lambda a s}{\mu+s}}. \tag{7}$$

So by inversion

$$\Omega(a+x, x) = e^{-\lambda a} \left[1 + \sqrt{\lambda \mu a} \int_0^x e^{-\mu y} y^{-\frac{1}{2}} I_1(2\sqrt{\lambda \mu a y}) dy \right]$$

where $I_1(x)$ is the Bessel function of order 1 for imaginary argument defined by

$$I_1(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2j+1}}{j!\,(j+1)!}.$$

By substitution $a = t - x$ we obtain

$$\Omega(t, x) = e^{-\lambda(t-x)} \left[1 + \sqrt{\lambda \mu (t-x)} \int_0^x e^{-\mu y} y^{-\frac{1}{2}} I_1\left(2\sqrt{\lambda \mu (t-x) y}\right) dy \right]. \tag{8}$$

§ 2. The limiting distribution of $\beta(t)$

We prove the following[2]

THEOREM 2. *If $\sigma_\alpha^2+\sigma_\beta^2<\infty$, then we have*

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\left\{\frac{\beta(t)-\dfrac{\beta t}{\alpha+\beta}}{\sqrt{\dfrac{\beta^2\sigma_\alpha^2+\alpha^2\sigma_\beta^2}{(\alpha+\beta)^3}t}}\le x\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2}dy. \tag{9}$$

PROOF. To prove (9) we need the

LEMMA 2. *Let us put*

$$\Omega=\sum_{n=0}^{\infty} H_n(G_n-G_{n+1}) \tag{10}$$

and

$$\Omega^*=\sum_{n=0}^{\infty} H_n^*(G_n^*-G_{n+1}^*) \tag{11}$$

where

$$1=H_0\geqq H_1\geqq\cdots\geqq H_n\geqq\cdots\geqq 0, \tag{12}$$

$$1=G_0\geqq G_1\geqq\cdots\geqq G_n\geqq\cdots\geqq 0, \tag{13}$$

$$1\geqq H_0^*\geqq H_1^*\geqq\cdots\geqq H_n^*\geqq\cdots\geqq 0, \tag{14}$$

$$1\geqq G_0^*\geqq G_1^*\geqq\cdots\geqq G_n^*\geqq\cdots\geqq 0. \tag{15}$$

Suppose that for all $\varepsilon>0$ there are integers N and M for which

$$1-G_N<\varepsilon, \tag{16}$$

$$G_M<\varepsilon, \tag{17}$$

$$|H_n-H_n^*|<\varepsilon \quad \text{if} \quad N-1\leqq n\leqq M+1, \tag{18}$$

$$|G_n-G_n^*|<\varepsilon \quad \text{if} \quad N-1\leqq n\leqq M+1. \tag{19}$$

Then we have

$$|\Omega-\Omega^*|<10\varepsilon. \tag{20}$$

PROOF OF LEMMA 2. Evidently

$$|\Omega-\Omega^*|\leqq(1-G_N)+G_M+(1-G_N^*)+G_M^*+$$
$$+\left|\sum_{N}^{M}[H_n(G_n-G_{n+1})-H_n^*(G_n^*-G_{n+1}^*)]\right|.$$

[2] *Note added in proof.* Further limiting distributions are proved by the author in a forthcoming paper „On limiting distributions of a sojourn time problem" (*Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, 8 (1957) (under press)).

Clearly

$$\left|\sum_N^M H_n(G_n-G_{n+1})-\sum_N^M H_n^*(G_n-G_{n+1})\right|<\varepsilon$$

and it can be shown easily that

$$\left|\sum_N^M H_n^*(G_n-G_{n+1})-\sum_N^M H_n^*(G_n^*-G_{n+1}^*)\right|<3\varepsilon.$$

For

$$\sum_N^M H_n^*(G_n-G_{n+1})=\sum_N^M G_n(H_n^*-H_{n-1}^*)+H_{N-1}^*G_N-H_M^*G_{M+1}$$

and similarly

$$\sum_N^M H_n^*(G_n^*-G_{n+1}^*)=\sum_N^M G_n^*(H_n^*-H_{n-1}^*)+H_{N-1}^*G_N^*-H_M^*G_{M+1}^*.$$

So we have

$$\left|\sum_N^M H_n^*(G_n-G_{n+1})-\sum_N^M H_n^*(G_n^*-G_{n+1}^*)\right|\leqq\left|\sum_N^M (G_n-G_n^*)(H_n-H_{n-1}^*)\right|+$$
$$+H_{N-1}^*|G_N-G_N^*|+H_M^*|G_{M+1}-G_{M+1}^*|<3\varepsilon.$$

Combining the above inequalities we have finally

$$|\Omega-\Omega^*|<\varepsilon+\varepsilon+2\varepsilon+2\varepsilon+4\varepsilon=10\,\varepsilon$$

what was to be proved.

To prove (9) write in Lemma 2 as follows:

$$H_n=H_n\left(\frac{\beta t}{\alpha+\beta}+x\sqrt{Bt}\right),\qquad H_n^*=\Phi\left(\frac{\dfrac{\beta t}{\alpha+\beta}+x\sqrt{Bt}-n\beta}{\sqrt{\dfrac{\sigma_\beta^2 t}{\alpha+\beta}}}\right),$$

$$G_n=G_n\left(\frac{\alpha t}{\alpha+\beta}-x\sqrt{Bt}\right),\quad G_n^*=\Phi\left(\frac{\dfrac{\alpha t}{\alpha+\beta}-x\sqrt{Bt}-n\alpha}{\sqrt{\dfrac{\sigma_\alpha^2 t}{\alpha+\beta}}}\right),$$

where

$$B=\frac{\alpha^2\sigma_\beta^2+\beta^2\sigma_\alpha^2}{(\alpha+\beta)^3}$$

and

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\infty}^{x}e^{-y^2/2}dy.$$

Further put

$$N = N_t = \frac{t}{\alpha+\beta} - \left(\frac{t}{\alpha+\beta}\right)^{\frac{1+\delta}{2}}$$

and

$$M = M_t = \frac{t}{\alpha+\beta} + \left(\frac{t}{\alpha+\beta}\right)^{\frac{1+\delta}{2}}$$

with a small positive δ.

We shall prove by Lemma 2 that for all $\varepsilon > 0$, $|\Omega - \Omega^*| < 10\varepsilon$ holds if t is sufficiently large. We remark that now $\Omega = \Omega\left(t, \frac{\beta t}{\alpha+\beta} + x\sqrt{Bt}\right)$.

To prove the mentioned statement we observe that (12), (13), (14) and (15) are clearly fulfilled. We must only show that (16), (17), (18) and (19) are satisfied if t is large enough. Applying CHEBYSHEV'S well-known inequality we get

$$1 - G_N = 1 - G_{N_t}\left(\frac{\alpha t}{\alpha+\beta} - x\sqrt{Bt}\right) \leq \frac{N_t \sigma_\alpha^2}{\left[\left(\frac{t}{\alpha+\beta}\right)^{\frac{1+\delta}{2}} \alpha - x\sqrt{Bt}\right]^2} \to 0 \quad \text{if} \quad t \to \infty$$

and

$$G_M = G_{M_t}\left(\frac{\alpha t}{\alpha+\beta} - x\sqrt{Bt}\right) \leq \frac{M_t \sigma_\alpha^2}{\left[\left(\frac{t}{\alpha+\beta}\right)^{\frac{1+\delta}{2}} \alpha + x\sqrt{Bt}\right]^2} \to 0 \quad \text{if} \quad t \to \infty$$

which prove (16) and (17). To see (18) and (19) we recall the central limit theorem. Accordingly, under the condition $\sigma_\alpha^2 < \infty$ for sufficiently large n we have

$$\left| H_n\left(\frac{\beta t}{\alpha+\beta} + x\sqrt{Bt}\right) - \Phi\left(\frac{\frac{\beta t}{\alpha+\beta} + x\sqrt{Bt} - n\beta}{\sqrt{n\sigma_\beta^2}}\right) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Consequently, for $N_t - 1 \leqq n \leqq M_t + 1$ the above inequality holds if t is sufficiently large. Further for $N_t - 1 \leqq n \leqq M_t + 1$

$$\left| \Phi\left(\frac{\frac{\beta t}{\alpha+\beta} + x\sqrt{Bt} - n\beta}{\sqrt{n\sigma_\beta^2}}\right) - \Phi\left(\frac{\frac{\beta t}{\alpha+\beta} + x\sqrt{Bt} - n\beta}{\sqrt{\frac{\sigma_\beta^2 t}{\alpha+\beta}}}\right) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

holds if t is large enough. Combining the last two inequalities we see that

(18) is fulfilled if t is large enough. Similarly (19) holds also if $\sigma_\beta^2 < \infty$ and t is sufficiently large.

We have thus shown that for all $\varepsilon > 0$

$$\left| \Omega\left(t, \frac{\beta t}{\alpha+\beta} + x\sqrt{Bt}\right) - \sum_{n=0}^{\infty} \Phi\left(\frac{\frac{\beta t}{\alpha+\beta} + x\sqrt{Bt} - n\beta}{\sqrt{\frac{\sigma_\beta^2 t}{\alpha+\beta}}}\right)\left[\Phi\left(\frac{\frac{\alpha t}{\alpha+\beta} - x\sqrt{Bt} - n\alpha}{\sqrt{\frac{\sigma_\alpha^2 t}{\alpha+\beta}}}\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \Phi\left(\frac{\frac{\alpha t}{\alpha+\beta} - x\sqrt{Bt} - (n+1)\alpha}{\sqrt{\frac{\sigma_\alpha^2 t}{\alpha+\beta}}}\right)\right]\right| < 10\,\varepsilon$$

if t is sufficiently large. Writing

$$n = \frac{t}{\alpha+\beta} + y_n\sqrt{t}$$

and taking into consideration that $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ we have

$$\lim_{t\to\infty} \Omega\left(t, \frac{\beta t}{\alpha+\beta} + x\sqrt{Bt}\right) = \lim_{t\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \Phi\left(\frac{x\sqrt{B} - \beta y_n}{\sqrt{\frac{\sigma_\beta^2}{\alpha+\beta}}}\right)\left[\Phi\left(\frac{x\sqrt{B} + \alpha y_n}{\sqrt{\frac{\sigma_\alpha^2}{\alpha+\beta}}}\right) - \right.$$

$$\left. - \Phi\left(\frac{x\sqrt{B} + \alpha y_{n+1}}{\sqrt{\frac{\sigma_\alpha^2}{\alpha+\beta}}}\right)\right].$$

Being $(y_{n+1} - y_n) = 1/\sqrt{t}$ and $y_0 \to -\infty$, $y_\infty \to \infty$ if $t \to \infty$, it follows

$$(21)\quad \lim_{t\to\infty} \Omega\left(t, \frac{\beta t}{\alpha+\beta} + x\sqrt{Bt}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(\frac{x\sqrt{B} - \beta y}{\sqrt{\frac{\sigma_\beta^2}{\alpha+\beta}}}\right) d_y\, \Phi\left(\frac{x\sqrt{B} + \alpha y}{\sqrt{\frac{\sigma_\alpha^2}{\alpha+\beta}}}\right) = \Phi(x),$$

what was to be proved.

The last integral identity may be verified easily if we consider two independent normally distributed random variables ξ and η, where

$$\mathbf{M}\{\xi\} = \alpha, \quad \mathbf{D}^2\{\xi\} = \sigma_\alpha^2 \quad \text{and} \quad \mathbf{M}\{\eta\} = \beta, \quad \mathbf{D}^2\{\eta\} = \sigma_\beta^2.$$

Then the integral (21) can be expressed as follows:

$$\mathbf{P}\left\{ \frac{\beta\xi - \alpha\eta}{\sqrt{\beta^2\sigma_\alpha^2 + \alpha^2\sigma_\beta^2}} \leq x \right\} = \Phi(x),$$

$\beta\xi - \alpha\eta$ being also normally distributed with mean $\mathbf{M}\{\beta\xi - \alpha\eta\} = 0$ and variance $\mathbf{D}^2\{\beta\xi - \alpha\eta\} = \beta^2\sigma_\alpha^2 + \alpha^2\sigma_\beta^2$.

§ 3. The limit of $P_B(t)$

Let us put $P_B(t)=\mathbf{P}\{\xi(t)\in B\}$ and $P_A(t)=\mathbf{P}\{\xi(t)\in A\}$. Clearly we have $P_A(t)+P_B(t)=1$ for all t.

THEOREM 3. *If $\alpha+\beta<\infty$, then we have*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t P_B(u)\,du=\frac{\beta}{\alpha+\beta}. \tag{22}$$

If $\alpha+\beta<\infty$ and $F(x)$ is not a lattice distribution, then we have

$$\lim_{t\to\infty}P_B(t)=\frac{\beta}{\alpha+\beta}. \tag{23}$$

PROOF. We shall prove the corresponding statements for $P_A(t)$. From these (22) and (23) follow immediately. We can write

$$P_A(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^t[1-G(t-y)]\,dF_n(y) \tag{24}$$

where $F_n(x)$ denotes the n-th iterated convolution of the distribution function $F(x)$ with itself, and $F_0(x)=1$ if $x\geqq 0$, $F_0(x)=0$ if $x<0$. In fact, the event $\xi(t)\in A$ can be realised in several mutually exclusive ways: in the time interval $(0,t]$ $n=0,1,2,\ldots$ transitions $B\to A$ occur and if the last transition occurs at the instant y, then $\xi_{n+1}>t-y$.

Denote by $M(t)$ the expectation of the number of transitions $B\to A$ occurring in the time interval $[0,t]$. Clearly

$$M(t)=\sum_{n=0}^{\infty}F_n(t).$$

So we have

$$P_A(t)=\int_0^t[1-G(t-y)]\,dM(y). \tag{25}$$

If $\alpha+\beta<\infty$, then we have

$$\lim_{t\to\infty}\frac{M(t)}{t}=\frac{1}{\alpha+\beta} \tag{26}$$

(S. TÄCKLIND [13], W. FELLER [3]) and if $\alpha+\beta<\infty$ and $F(x)$ is not a lattice distribution, then for all $h>0$ we have

$$\lim_{t\to\infty}\frac{M(t+h)-M(t)}{h}=\frac{1}{\alpha+\beta}. \tag{27}$$

(D. BLACKWELL [1].)

Now we have

$$\frac{1}{t}\int_0^t P_A(u)\,du=\frac{1}{t}\int_0^t\left[\int_0^{t-x}(1-G(y))\,dy\right]dM(x).$$

Hence

$$\frac{M(t-\tau)}{t}\int_0^\tau[1-G(y)]\,dy\leqq\frac{1}{t}\int_0^t P_A(u)\,du\leqq\alpha\frac{M(t)}{t}$$

with some τ where $0<\tau<t$. Letting $t\to\infty$ and $\tau\to\infty$ in the above expression, then by (26) we have

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t P_A(u)\,du=\frac{\alpha}{\alpha+\beta},$$

what proves also (22).

To prove (23) let us write $P_A(t)$ in the following form:

$$P_A(t)=\int_0^{t/2}[1-G(t-y)]\,dM(y)+\int_{t/2}^t[1-G(t-y)]\,dM(y). \tag{28}$$

Here the first member of the right-hand side tends to 0 as $t\to\infty$. Namely,

$$0\leqq\int_0^{t/2}[1-G(t-y)]\,dM(y)\leqq[1-G(t/2)]M(t/2)$$

and

$$\lim_{t\to\infty}t[1-G(t)]=0,$$

because of

$$0\leqq t[1-G(t)]\leqq\int_t^\infty x\,dG(x)\to 0\quad\text{if}\quad t\to\infty,$$

being $\alpha=\int_0^\infty x\,dG(x)<\infty$; on the other hand (26) holds. The second member of the right-hand side tends to $\alpha/(\alpha+\beta)$ as $t\to\infty$. This fact can be shown by some manipulations on the approximative sum of the integral and by using (27). So we have finally $\lim_{t\to\infty}P_A(t)=\alpha/(\alpha+\beta)$ what proves also (23).

REMARK 3. If $\alpha+\beta<\infty$, then according to (22) we have

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\mathbf{M}\{\beta(t)\}}{t}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}, \tag{29}$$

because

$$\mathbf{M}\{\beta(t)\}=\mathbf{M}\left\{\int_0^t\chi(u)\,du\right\}=\int_0^t\mathbf{M}\{\chi(u)\}\,du=\int_0^t P_B(u)\,du.$$

§ 4. On a recurrent process

This section is independent of the others. We shall prove some theorems which will be used in the following.

Consider a sequence of events $\{\tau_n\}$ $(n=1,2,3,\dots)$ where the time differences $\delta_n=\tau_{n+1}-\tau_n$ $(n=0,1,2,\dots;\tau_0=0)$ are independent non-negative random variables, and $\mathbf{P}\{\delta_0\leq x\}=\hat{F}(x)$, $\mathbf{P}\{\delta_n\leq x\}=F(x)$ $(n=1,2,3,\dots)$. We define a random variable $\nu=\nu_t$ as follows: Let be $\nu_t=n$ if $\tau_n\leq t<\tau_{n+1}$.

Introduce the following notations:

$$\mu=\int_0^\infty x\,dF(x),\quad \mu_0=\int_0^\infty x\,d\hat{F}(x),$$

$$\sigma^2=\int_0^\infty (x-\mu)^2dF(x),\qquad \sigma_0^2=\int_0^\infty (x-\mu_0)^2d\hat{F}(x)$$

and

$$\varphi(s)=\int_0^\infty e^{-sx}dF(x),\quad \varphi_0(s)=\int_0^\infty e^{-sx}d\hat{F}(x).$$

Further define

$$\mathbf{M}\{\nu_t\}=M_1(t),\quad \mathbf{M}\{\nu_t^2\}=M_2(t)\quad\text{and}\quad \mathbf{D}^2\{\nu_t\}=D^2(t).$$

It is easily seen that

$$\int_0^\infty e^{-st}dM_1(t)=\frac{\varphi_0(s)}{1-\varphi(s)}\qquad(\text{if }\Re(s)>0)\tag{30}$$

and

$$\int_0^\infty e^{-st}dM_2(t)=\frac{2\varphi_0(s)}{[1-\varphi(s)]^2}-\frac{\varphi_0(s)}{[1-\varphi(s)]}\qquad(\text{if }\Re(s)>0).\tag{31}$$

It is well known from the renewal theory that

$$\lim_{t\to\infty}\frac{M_1(t)}{t}=\frac{1}{\mu}\tag{32}$$

(S. Täcklind [13], W. Feller [3]). We shall prove the following

Theorem 4. *If $\sigma^2<\infty$, $\mu_0<\infty$ and $F(x)$ is not a lattice distribution, then we have*

$$\lim_{t\to\infty}\left[M_1(t)-\frac{t}{\mu}\right]=\frac{\sigma^2+\mu^2}{2\mu^2}-\frac{\mu_0}{\mu}.\tag{33}$$

Proof. We observe that for $s \to 0$

$$\int_0^\infty e^{-st} dM_1(t) = \frac{1}{\mu s} + \frac{\sigma^2 + \mu^2}{2\mu^2} - \frac{\mu_0}{\mu} + o(s).$$

From this fact in several works (33) is concluded without any additional assumption. However, this is wrong. If $F(x)$ is a lattice distribution, then it is easy to show that the limit (33) does not exist. Now we shall prove some lemmas.

Lemma 3. *If $\mu < \infty$ and $F(x)$ is not a lattice distribution, then we have for all $h > 0$*

(34) $$\lim_{t \to \infty} \frac{M_1(t+h) - M_1(t)}{h} = \frac{1}{\mu}.$$

To prove (34) let us introduce

$$M(t) = \sum_{n=0}^\infty F_n(t).$$

According to a theorem of D. Blackwell [1] we have for all $h > 0$

$$\lim_{t \to \infty} \frac{M(t+h) - M(t)}{h} = \frac{1}{\mu}.$$

Now we can write

$$M_1(t) = \int_0^t M(t-x)\, d\hat{F}(x).$$

Accordingly

$$M_1(t+h) - M_1(t) = \int_0^{t/2} [M(t+h-x) - M(t-x)]\, d\hat{F}(x) +$$

$$+ \int_{t/2}^t [M(t+h-x) - M(t-x)]\, d\hat{F}(x) + \int_0^{t+h} M(t+h-x)\, d\hat{F}(x).$$

On the right-hand side the first member tends to h/μ if $t \to \infty$, the second member $\leq [1 + M(h)]\,[\hat{F}(t) - \hat{F}(t/2)] \to 0$ if $t \to \infty$ and the third member $\leq M(h)[\hat{F}(t+h) - \hat{F}(t)] \to 0$ if $t \to \infty$, what proves (34).

Let us introduce a new random variable $\varepsilon_t = \tau_{\nu+1} - t$. We prove the following

Lemma 4. *If $\mu < \infty$ and $F(x)$ is not a lattice distribution, then we have*

(35) $$\lim_{t \to \infty} \mathbf{P}\{\varepsilon_t \leq x\} = F^*(x)$$

where

$$F^*(x) = \begin{cases} \frac{1}{\mu}\int_0^x [1-F(y)]dy & \text{if} \quad x \geqq 0, \\ 0 & \text{if} \quad x < 0. \end{cases} \tag{36}$$

It is easily seen that

$$\mathbf{P}\{\varepsilon_t \leqq x\} = \int_t^{t+x} [1-F(t+x-y)]dM_1(y),$$

because of

$$\mathbf{P}\{\varepsilon_t \leqq x\} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\{t < \tau_n \leqq t+x < \tau_{n+1}\}.$$

Applying (34) it follows easily (35).

Especially it follows from (35) that, if $\sigma^2 < \infty$ and $F(x)$ is not a lattice distribution, then we have

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{M}\{\varepsilon_t\} = \int_0^{\infty} x\,dF^*(x) = \frac{\sigma^2+\mu^2}{2\mu}. \tag{37}$$

We are next going to prove (33). By WALD's theorem (generalized by A. N. KOLMOGOROV and YU. V. PROHOROV [6]) we have

$$\mathbf{M}\{\delta_0+\delta_1+\cdots+\delta_\nu\} = \mathbf{M}\{\delta_0\} + \mathbf{M}\{\nu\}\mathbf{M}\{\delta_1\}.$$

As $\delta_0+\delta_1+\cdots+\delta_\nu = t+\varepsilon_t$,

$$\mathbf{M}\{\delta_0+\delta_1+\cdots+\delta_\nu\} = t+\mathbf{M}\{\varepsilon_t\}$$

holds. Hence

$$t+\mathbf{M}\{\varepsilon_t\} = \mu_0+\mu M_1(t),$$

i. e.

$$\lim_{t\to\infty}\left(M_1(t)-\frac{t}{\mu}\right) = \frac{1}{\mu}\lim_{t\to\infty}\mathbf{M}\{\varepsilon_t\} - \frac{\mu_0}{\mu},$$

what was to be proved.

REMARK 4. If in the above case particularly $F(x) = F^*(x)$ defined by (36), then we have simply

$$M_1(t) = M_1^*(t) = \frac{t}{\mu}. \tag{38}$$

THEOREM 5. *If $\sigma^2 < \infty$, then we have*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{D^2(t)}{t} = \frac{\sigma^2}{\mu^3}. \tag{39}$$

PROOF. This theorem was proved by W. FELLER [4] in case if $F(x)$ is a lattice distribution. Thus it is sufficient to consider the case when $F(x)$

is not a lattice distribution. First let us suppose particularly $\dot{F}(x)=F^*(x)$ defined by (36). In this case let us denote $M_1(t)=M_1^*(t)$, $M_2(t)=M_2^*(t)$ and $D^2(t)=D^{*2}(t)$. Now we have

$$M_1^*(t)=\frac{t}{\mu}$$

and

$$\int_0^\infty e^{-st}\,dM_2^*(t)=\frac{1}{\mu s}\left[\frac{2}{1-\varphi(s)}-1\right],$$

because of $\varphi_0(s)=[1-\varphi(s)]/\mu s$. Consequently

$$M_2^*(t)=\frac{2}{\mu}\int_0^t M_1^{(0)}(u)\,du-\frac{t}{\mu}$$

where $M_1^{(0)}(t)=M_1(t)$ is related to a recurrent process for which $\vartheta_0\equiv 0$ In this case by (33)

$$\lim_{t\to\infty}\left(M_1^{(0)}(t)-\frac{t}{\mu}\right)=\frac{\sigma^2+\mu^2}{2\mu^2}$$

holds. Consequently

$$M_2^*(t)=\frac{t^2}{\mu^2}+\frac{\sigma^2 t}{\mu^3}+o(t),$$

i. e.

(40) $$D^{*2}(t)=\frac{\sigma^2}{\mu^3}t+o(t),$$

what proves (39) in the particular case $\dot{F}(x)=F^*(x)$. Now let us estimate $D^2(t)=\mathbf{D}^2\{\nu_t\}$ in the general case. We can write clearly

$$\mathbf{D}^2\{\nu_{T+t}\}=\mathbf{D}^2\{\nu_T\}+\mathbf{D}^2\{\nu_{T+t}-\nu_T\}+2\varrho\,\mathbf{D}\{\nu_t\}\,\mathbf{D}\{\nu_{T+t}-\nu_T\}$$

where $|\varrho|\leq 1$. Here, using (35), we can prove easily that

$$\lim_{T\to\infty}\mathbf{D}^2\{\nu_{T+t}-\nu_T\}=D^{*2}(t),$$

further, according to a theorem of S. Täcklind [13], it holds that $D^2(t)/t$ is bounded. Consequently, we obtain for $T\to\infty$ and $t\to\infty$ that

$$D^2(T+t)=D^2(T)+D^{*2}(t)+O(\sqrt{Tt}).$$

Using (40) it follows (39) for the general case too.

REMARK 5. If $\sigma^2 < \infty$, then ν_t is asymptotically normally distributed, i.e.

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\left\{\frac{\nu_t - \frac{t}{\mu}}{\sqrt{\frac{\sigma^2 t}{\mu^3}}} \leq x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2} dy. \tag{41}$$

The proof may be found in [11]. If $\sigma^2 = \infty$ or $\mu = \infty$, then the asymptotic distribution of ν_t is a stable distribution if it exists at all.

§ 5. The moments of $\beta(t)$

Denote by $B_r(t)$ $(r = 1, 2, 3, \ldots)$ the r-th moment of $\beta(t)$, i. e.

$$B_r(t) = \mathbf{M}\{(\beta(t))^r\} = \int_0^t x^r d_x\Omega(t, x) = r\int_0^t x^{r-1}[1-\Omega(t, x)]dx. \tag{42}$$

We can write easily the Laplace—Stieltjes transforms of $B_r(t)$. Using (1) by (42) we obtain

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-st} dB_r(t) &= \frac{r!}{s^r} + (-1)^r r[1-\gamma(s)]\sum_{n=0}^{\infty}[\gamma(s)]^n \frac{d^{r-1}[\psi(s)]^n/s}{ds^{r-1}} = \\ &= \frac{r!}{s^r}\left[1-(1-\gamma(s))\sum_{j=0}^{r-1}\frac{(-1)^j s^j}{j!}\left(\sum_{n=j}^{\infty}[\gamma(s)]^n \frac{d^j[\psi(s)]^n}{ds^j}\right)\right]\end{aligned} \tag{43}$$

where

$$\gamma(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dG(x)$$

and

$$\psi(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dH(x).$$

Particularly

$$\int_0^\infty e^{-st} dB_1(t) = \frac{1}{s}\left[1 - \frac{1-\gamma(s)}{1-\gamma(s)\psi(s)}\right] \tag{44}$$

and

$$\int_0^\infty e^{-st} dB_2(t) = \frac{2}{s^2}\left[1 - \frac{1-\gamma(s)}{1-\gamma(s)\psi(s)} + \frac{s[1-\gamma(s)]\gamma(s)\psi'(s)}{(1-\gamma(s)\psi(s))^2}\right]. \tag{45}$$

THEOREM 6. *If $\alpha+\beta<\infty$, then we have*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\mathbf{M}\{\beta(t)\}}{t}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}, \tag{46}$$

and if $\sigma_\alpha^2+\sigma_\beta^2<\infty$ and $F(x)$ is not a lattice distribution, then we have

$$\lim_{t\to\infty}\left[\mathbf{M}\{\beta(t)\}-\frac{\beta t}{\alpha+\beta}\right]=\frac{\beta\sigma_\alpha^2-\alpha\sigma_\beta^2}{2(\alpha+\beta)^2}-\frac{\alpha\beta}{2(\alpha+\beta)}. \tag{47}$$

PROOF. First we remark that

$$\psi(s)=1-\beta s+\frac{\beta^2+\sigma_\beta^2}{2}s^2+o(s^2)$$

and

$$\gamma(s)=1-\alpha s+\frac{\alpha^2+\sigma_\alpha^2}{2}s^2+o(s^2).$$

Hence for $s\to 0$ we obtain

$$\int_0^\infty e^{-st}\,dB_1(t)=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\frac{1}{s}+\frac{\beta\sigma_\alpha^2-\alpha\sigma_\beta^2}{2(\sigma+\beta)^2}-\frac{\alpha\beta}{2(\alpha+\beta)}+o(s).$$

From this expression does not follow (47) without the additional condition of $F(x)$ being a lattice distribution. If $F(x)$ is a lattice type, then (47) does not hold.

To prove (46) and (47) let us define a random variable ν_t similarly as in § 4, supposing that $\mathbf{P}\{\delta_n\leq x\}=F(x)$ $(n=1,2,\ldots)$ and $\mathbf{P}\{\delta_0\leq x\}=G^*(x)$ where

$$G^*(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\alpha}\displaystyle\int_0^x[1-G(y)]\,dy & \text{if} \quad x\geq 0,\\ 0 & \text{if} \quad x<0.\end{cases}$$

In this case it is easy to prove by Laplace—Stieltjes transformation that

$$\mathbf{M}\{\beta(t)\}+\alpha\mathbf{M}\{\nu_t\}=t.$$

As in case $\alpha+\beta<\infty$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\mathbf{M}\{\nu_t\}}{t}=\frac{1}{\alpha+\beta},$$

this proves (46). Further, in case $\sigma_\alpha^2+\sigma_\beta^2<\infty$ and if $F(x)$ is not a lattice distribution we have by Theorem 4

$$\lim_{t\to\infty}\left[\mathbf{M}\{\nu_t\}-\frac{t}{\alpha+\beta}\right]=\frac{\sigma_\alpha^2+\sigma_\beta^2+(\alpha+\beta)^2}{2(\alpha+\beta)^2}-\frac{\sigma_\alpha^2+\alpha^2}{2\alpha(\alpha+\beta)}$$

what proves (47).

THEOREM 7. *If* $\sigma_\alpha^2+\sigma_\beta^2<\infty$, *then we have*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\mathbf{D}^2\{\beta(t)\}}{t}=\frac{\alpha^2\sigma_\beta^2+\beta^2\sigma_\alpha^2}{(\alpha+\beta)^3}. \tag{48}$$

PROOF. It is easy to verify by Laplace—Stieltjes transformation that

$$B_2(t)=2\int_0^t B_1(u)\,du-\alpha\beta[M_1(t)+M_2(t)], \tag{49}$$

where $M_1(t)$ and $M_2(t)$ are related to a recurrent process defined in § 4 with the following assumptions: $\varphi(s)=\gamma(s)\psi(s)$ and $\varphi_0(s)=-\gamma(s)\dfrac{1-\gamma(s)}{\alpha s}\dfrac{\psi'(s)}{\beta}$. In this case $\mathbf{M}\{\delta_n\}=\alpha+\beta$, $\mathbf{D}^2\{\delta_n\}=\sigma_\alpha^2+\sigma_\beta^2$ $(n=1,2,3,\ldots)$ and $\mathbf{M}\{\delta_0\}=$ $=\alpha+\dfrac{\sigma_\alpha^2+\alpha^2}{2\alpha}+\dfrac{\sigma_\beta^2+\beta^2}{\beta}$.

We carry out the proof of (48) in case when $F(x)$ is not a lattice distribution. If $F(x)$ is a lattice type, the proof is similar using the asymptotic formulae given by W. FELLER [4].

In (49) it holds by Theorem 4

$$M_1(t)=\frac{t}{\alpha+\beta}+\frac{\sigma_\alpha^2+\sigma_\beta^2+(\alpha+\beta)^2}{2(\alpha+\beta)^2}-\frac{\beta(\sigma_\alpha^2+\alpha^2)+2\alpha^2\beta+2\alpha(\sigma_\beta^2+\beta^2)}{2\alpha\beta(\alpha+\beta)}+o(1)$$

and by Theorem 5

$$M_2(t)=[M_1(t)]^2+\frac{\sigma_\alpha^2+\sigma_\beta^2}{(\alpha+\beta)^3}t+o(t).$$

Taking (47) into consideration we have

$$2\int_0^t B_1(u)\,du=\frac{\beta t^2}{\alpha+\beta}+\left[\frac{\beta\sigma_\alpha^2-\alpha\sigma_\beta^2}{(\alpha+\beta)^2}-\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}\right]t+o(t).$$

Finally

$$\mathbf{D}^2\{\beta(t)\}=B_2(t)-[B_1(t)]^2=\frac{\alpha^2\sigma_\beta^2+\beta^2\sigma_\alpha^2}{(\alpha+\beta)^3}t+o(t)$$

what proves (48).

EXAMPLE 2. Let us consider the following queueing process with a single server (cf. [12]): The arrival times follow a Poisson process with density λ and the service times are identically distributed independent random variables with the distribution function $P(x)$. Let be $\varrho=\int_0^\infty x\,dP(x)$, $\sigma_\varrho^2=\int_0^\infty (x-\varrho)^2\,dP(x)$ and $\pi(s)=\int_0^\infty e^{-sx}\,dP(x)$. Denote by $\xi(t)$ the number of persons waiting and being

served in the instant t. We shall investigate the process $\{\xi(t),\ 0 \leqq t < \infty\}$ with the initial condition $\xi(0)=0$. We say that in the instant t the system is in state A if $\xi(t)=0$ and in state B if $\xi(t)>0$. It is easily seen that for the process $\{\xi(t)\}$ we can apply the general theorems given in this work. Now $\beta(t)$ denotes the total service time related to the time interval $(0, t)$. In our case it holds $G(x)=1-e^{-\lambda x}$ if $x \geqq 0$ and $\psi(s)$, the Laplace—Stieltjes transform of $H(x)$, is the unique solution of the functional equation $\psi(s)=\pi(s+\lambda-\lambda\psi(s))$ with $\psi(\infty)=0$. (Cf. [14], Theorem 6.) If $\lambda\varrho<1$, then $H(x)$ is a proper distribution function. Consequently in our case $\alpha=1/\lambda$ and $\sigma_\alpha^2=1/\lambda^2$, and if $\lambda\varrho<1$, then we have $\beta=\varrho\,(1-\lambda\varrho)$ and $\sigma_\beta^2= =(\sigma_\varrho^2+\lambda\varrho^3)/(1-\lambda\varrho)^3$. Applying Theorem 2 we have in case $\lambda\varrho<1$ and $\sigma_\varrho^2<\infty$

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}\left\{\frac{\beta(t)-\lambda\varrho t}{\sqrt{\lambda(\sigma_\varrho^2+\varrho^2)t}}\leqq x\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-y^2/2}\,dy. \tag{50}$$

Example 3. Let us consider m machines which work intermittently and independently of each other. Suppose that, if at time t a machine is in working state, the probability that it ceases working at time $t+\Delta t$ is $\lambda\Delta t+o(\Delta t)$ and if at time t a machine does not work, the probability that it will be working at time $t+\Delta t$ is $\mu\Delta t+o(\Delta t)$. Denote by $\xi(t)$ the number of machines working in the instant t. If $\xi(t)=j$ $(j=0, 1, \ldots, m)$ we speak about the state E_j. Let k $(0 \leqq k < m)$ be a fixed integer. Consider the stochastic process $\{\xi(t), 0 \leqq t < \infty\}$ with the initial state $\xi(0)=k$. Define $A=\{0, 1, \ldots, k\}$ and $B=\{k+1, k+2, \ldots, m\}$. It is easily seen that the above process belongs to the type described in the Introduction. Let $\beta(t)$ denote the total time during the time interval $(0, t)$ in which the number of the machines working simultaneously exceeds k.

To apply our theorems we require the distribution function $G(x)$ and $H(x)$ or their Laplace—Stieltjes transforms $\gamma(s)$ and $\psi(s)$. For this purpose introduce the following transition probabilities:

$$\mathbf{P}\{\xi(t)=j\,|\,\xi(0)=k\}=P_j(t).$$

$P_j(t)$ can be determined immediately. Denote by $P(t)$ the probability that a machine is in working state at time t assuming that at $t=0$ it works and by $Q(t)$ the same probability for a machine which does not work at $t=0$. We have

$$P(t)=\frac{1}{\mu+\lambda}\left(\mu+\lambda e^{-(\mu+\lambda)t}\right).$$

Namely, $P(0)=1$ and it holds $P(t+\Delta t)=P(t)(1-\lambda\Delta t)+(1-P(t))\mu\Delta t+o(\Delta t)$, i. e. $P'(t)+(\lambda+\mu)P(t)=\mu$. Similarly

$$Q(t)=\frac{\mu}{\mu+\lambda}\left(1-e^{-(\mu+\lambda)t}\right).$$

Hence we obtain easily

$$(51) \qquad P_j(t)=\sum_{j_1+j_2=j}\binom{k}{j_1}\binom{m-k}{j_2}[P(t)]^{j_1}[1-P(t)]^{k-j_1}[Q(t)]^{j_2}[1-Q(t)]^{m-k-j_2}.$$

Next denote by $M(t)$ the expected number of the transitions $E_k\to E_{k+1}$ occurring in the time interval $(0,t)$ and by $N(t)$ the expected number of the transitions $E_{k+1}\to E_k$ occurring in the time interval $(0,t)$. We obtain easily that

$$\int_0^\infty e^{-st}dM(t)=(m-k)\mu\int_0^\infty e^{-st}P_k(t)\,dt=\frac{\gamma(s)}{1-\gamma(s)\psi(s)}$$

and similarly

$$\int_0^\infty e^{-st}dN(t)=(k+1)\lambda\int_0^\infty e^{-st}P_{k+1}(t)\,dt=\frac{\gamma(s)\psi(s)}{1-\gamma(s)\psi(s)}.$$

Comparing the above two equations we have

$$(52) \qquad \gamma(s)=\frac{(m-k)\mu\int_0^\infty e^{-st}P_k(t)dt}{1+(k+1)\lambda\int_0^\infty e^{-st}P_{k+1}(t)dt}$$

and

$$(53) \qquad \psi(s)=\frac{(k+1)\lambda\int_0^\infty e^{-st}P_{k+1}(t)dt}{(m-k)\mu\int_0^\infty e^{-st}P_k(t)dt}.$$

By using inversion we get $G(x)$ and $H(x)$. Especially we have

$$(54) \qquad \alpha=\frac{\sum_{j=0}^{k}\binom{m}{j}\mu^j\lambda^{m-j}}{m\binom{m-1}{k}\mu^{k+1}\lambda^{m-k}}$$

and

$$(55) \qquad \beta=\frac{\sum_{j=k+1}^{m}\binom{m}{j}\mu^j\lambda^{m-j}}{m\binom{m-1}{k}\mu^{k+1}\lambda^{m-k}}.$$

Further

$$\sigma_\alpha^2 = \alpha\left(2\frac{R_k}{P_k} + \alpha\right) + 2\frac{R_0 + R_1 + \cdots + R_k}{(m-k)\mu P_k} \tag{56}$$

and

$$\sigma_\beta^2 = \beta\left(2\frac{R_k}{P_k} - \beta\right) - 2\frac{R_0 + R_1 + \cdots + R_k}{(m-k)\mu P_k} \tag{57}$$

where

$$P_j = \binom{m}{j}\frac{\mu^j \lambda^{m-j}}{(\mu+\lambda)^m} \tag{58}$$

and with the notation

$$\mathfrak{P}_j = P_0 + P_1 + \cdots + P_j$$

it holds

$$R_0 = \frac{P_0}{\mu+\lambda}\left[\frac{k}{P_k}\sum_{j=k+1}^{m}\frac{P_j}{j-k} - \sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j}\right] \tag{59}$$

and for $j = 1, 2, \ldots, m$

$$R_j = P_j\left[\frac{R_0}{P_0} + \sum_{i=0}^{j-1}\frac{\mathfrak{P}_i}{(m-i)\mu P_i} - \sum_{i=k}^{j-1}\frac{1}{(m-i)\mu P_i}\right]. \tag{60}$$

To prove (54), (55), (56), (57) let us introduce the quantities

$$R_j = \int_0^\infty [P_j(t) - P_j]\,dt \qquad (j = 0, 1, \ldots, m)$$

and

$$S_j = \int_0^\infty t[P_j(t) - P_j]\,dt \qquad (j = 0, 1, \ldots, m).$$

R_j and S_j exist because of $\lim_{t\to\infty} P_j(t) = P_j$ and the convergence being of exponential type. Now

$$\int_0^\infty e^{-st} P_j(t)\,dt = P_j s^{-1} + R_j + S_j s + o(s)$$

and it can be seen easily from (52) and (53) that

$$\alpha = \frac{1 + (k+1)\lambda R_{k+1} - (m-k)\mu R_k}{(m-k)\mu P_k}$$

and

$$\beta = \frac{(m-k)\mu R_k - (k+1)\lambda R_{k+1}}{(m-k)\mu P_k}$$

where the equality $(m-k)\mu P_k=(k+1)\lambda P_{k+1}$ is used. Similarly we obtain

$$\sigma_\alpha^2=\alpha\left(\frac{2R_k}{P_k}+\alpha\right)+\frac{2[(m-k)\mu S_k-(k+1)\lambda S_{k+1}]}{(m-k)\mu P_k}$$

and

$$\sigma_\beta^2=\beta\left(\frac{2R_k}{P_k}-\beta\right)-\frac{2[(m-k)\mu S_k-(k+1)\lambda S_{k+1}]}{(m-k)\mu P_k}.$$

We observe that for $P_j(t)$ the following system of differential equations

$$\frac{dP_j(t)}{dt}=\Phi_j(t)-\Phi_{j-1}(t) \tag{61}$$

holds, where

$$\Phi_j(t)=(j+1)\lambda P_{j+1}(t)-(m-j)\mu P_j(t),$$

and the initial conditions are

$$P_j(0)=\begin{cases} 1 & \text{if} \quad j=k, \\ 0 & \text{if} \quad j\neq k. \end{cases}$$

(Further clearly $\Phi_m(t)=\Phi_{-1}(t)=0$.) Taking (61) into consideration we have

$$\int_0^\infty \Phi_j(t)dt=\int_0^\infty \Phi_{j-1}(t)dt+P_j-P_j(0).$$

By successive applications of this recurrence formula we get

$$\int_0^\infty \Phi_j(t)dt=\sum_{i=0}^{j}[P_i-P_i(0)]. \tag{62}$$

It is easily seen that

$$(k+1)\lambda R_{k+1}-(m-k)\mu R_k=\int_0^\infty \Phi_k(t)dt=P_0+P_1+\cdots+P_k-1=$$
$$=-(P_{k+1}+\cdots+P_m).$$

This proves (54) and (55). According to (61) we also have

$$\int_0^\infty t\Phi_j(t)dt=\int_0^\infty t\Phi_{j-1}(t)dt-\int_0^\infty [P_j(t)-P_j]dt=\int_0^\infty t\Phi_{j-1}(t)dt-R_j$$

and by successive applications of this formula we get

$$(k+1)\lambda S_{k+1}-(m-k)\mu S_k=\int_0^\infty t\Phi_k(t)dt=-(R_k+R_{k-1}+\cdots+R_0)$$

what proves (56) and (57).

To obtain (59) and (60) we observe that using (62) we have

$$(j+1)\lambda R_{j+1}-(m-j)\mu R_j=\int_0^\infty \Phi_j(t)\,dt=\sum_{i=0}^{j}[P_i-P_i(0)],$$

i. e.

$$(63)\qquad \begin{aligned}(j+1)\lambda R_{j+1}-(m-j)\mu R_j&=\mathfrak{P}_j \qquad (j=0,1,\ldots,k-1),\\ (j+1)\lambda R_{j+1}-(m-j)\mu R_j&=\mathfrak{P}_j-1 \qquad (j=k,k+1,\ldots,m)\end{aligned}$$

where $\mathfrak{P}_j=P_0+P_1+\cdots+P_j$ and obviously

$$(64)\qquad R_0+R_1+\cdots+R_m=0.$$

Taking into consideration that $(j+1)\lambda P_{j+1}=(m-j)\mu P_j$ we can get from (63) the following equations:

$$(65)\qquad \frac{R_{j+1}}{P_{j+1}}-\frac{R_j}{P_j}=\begin{cases}\dfrac{\mathfrak{P}_j}{(m-j)\mu P_j} & (j=0,1,\ldots,k-1),\\[2mm] \dfrac{\mathfrak{P}_j-1}{(m-j)\mu P_j} & (j=k,k+1,\ldots,m).\end{cases}$$

Summing up the above equations for $0,1,\ldots,j-1$ we obtain (60). Finally, R_0 can be determined by the aid of (64), or substituting $z=e^{-(\mu+\lambda)t}$ from (51) we have

$$\frac{R_0}{P_0}=\int_0^\infty\left[\frac{P_0(t)}{P_0}-1\right]dt=\frac{1}{\mu+\lambda}\int_0^1\frac{(1-z)^k\left(1+\frac{\mu}{\lambda}z\right)^{m-k}-1}{z}\,dz.$$

Evaluating the integral we obtain (59).

In possession of the above formulae we can apply the general theorems to the investigation of the behaviour of the random variable $\beta(t)$.

MATHEMATICAL INSTITUTE
OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

(Received 18 January 1957)

References

[1] D. Blackwell, A renewal theorem, *Duke Math. Journal*, **15** (1948), pp. 145—150.
[2] Р. Л. Добрушин, Предельные теоремы для цепи Маркова из двух состояний, Изв. Акад. Наук СССР, Сер. мат., **17** (1953), pp. 291—330.
[3] W. Feller, On the integral equation of renewal theory, *Annals of Math. Stat.*, **12** (1941), pp. 243—267.

[4] W. Feller, Fluctuation theory of recurrent events, *Transactions of the American Mathematical Society*, **67** (1947), pp. 98—119.

[5] A. Khintchine, *Asymptotische Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung* (Berlin, 1933).

[6] А. Н. Колмогоров и Ю. В. Прохоров, О суммах случайного числа случайных слагаемых, Усп. Мат. Наук, **4** (1949), вып. 4, pp. 168—172.

[7] А. Н. Колмогоров. Локальная предельная теорема для классических цепей Маркова, Изв. Акад. Наук СССР, Сер. мат., **13** (1949), pp. 281—300.

[8] L. Takács Occurrence and coincidence phenomena in case of happenings with arbitrary distribution law of duration, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **2** (1951), pp. 275—298.

[9] L. Takács, On processes of happenings generated by means of a Poisson process, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **6** (1955), pp. 81—99.

[10] L. Takács, Some investigations concerning recurrent stochastic processes of a certain type, *MTA Alk. Mat. Int. Közl.*, **3** (1954), pp. 115—128.

[11] L. Takács, On some probability problems concerning the theory of counters, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **8** (1957), pp. 127—138.

[12] L. Takács, Investigation of waiting time problems by reduction to Markov processes, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **6** (1955), pp. 101—129.

[13] S. Täcklind, Elementare Behandlung vom Erneuerungsproblem für den stationären Fall, *Skandinavisk Aktuarietidskrift*, **27** (1944), pp. 1—15.

ON THE ASYMPTOTIC DISTRIBUTION OF THE SUM OF A RANDOM NUMBER OF INDEPENDENT RANDOM VARIABLES

By

A. RÉNYI (Budapest), member of the Academy

Introduction

Let $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ denote a sequence of independent random variables and put

$$\zeta_n = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{1}$$

Several authors (see e. g. [1] and [2]) investigated the asymptotic distribution of $\zeta_{\nu(t)}$ for $t \to +\infty$ where $\nu(t)$ is a positive integer-valued random variable, for $t > 0$, which converges in probability to $+\infty$ for $t \to +\infty$. The most general results in this direction have been obtained by DOBRUŠIN [3]. In all these investigations it has been supposed that $\nu(t)$ is for any $t > 0$ independent of the random variables ζ_n $(n = 1, 2, \ldots)$. A general and very useful theorem without this supposition has been proved by F. J. ANSCOMBE [4]. In a recent paper [5] TAKÁCS has proved a theorem, which can be considered also as a result on the asymptotic distribution of the sum of a random number of independent random variables, i. e. using the above notations on the asymptotic distribution of $\zeta_{\nu(t)}$ where ζ_n is defined by (1). In this case $\nu(t)$ depends essentially on the variables ζ_n $(n = 1, 2, \ldots)$. The aim of the present paper is to show that the mentioned result of TAKÁCS can be easily deduced from a special case of the theorem of ANSCOMBE mentioned above. To make the paper self-contained, we give in § 1 a short proof of the special case of ANSCOMBE's theorem which is needed for our purpose (Theorem 1). Using this theorem, in § 2 a new and simple proof of the result of TAKÁCS mentioned above is given.

§ 1. A theorem of Anscombe

THEOREM 1 (ANSCOMBE). *Let us suppose that $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ are independent and identically distributed random variables with mean value* 0 *and variance* 1. *Let us put $\zeta_n = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$. Let further $\nu(t)$ denote a positive integer-valued random variable for any $t > 0$ such that $\dfrac{\nu(t)}{t}$ converges for $t \to +\infty$*

in probability to a constant $c>0$. *Then we have*[1]

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{\zeta_{\nu(t)}}{\sqrt{\nu(t)}}<x\right)=\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du. \tag{1.1}$$

PROOF OF THEOREM 1. Let $0<\varepsilon<\frac{1}{5}$ be arbitrary. First we choose a value $t_1>0$ such that for $t\geqq t_1$ we have

$$\mathbf{P}(|\nu(t)-ct|\geqq c\varepsilon t)\leqq\varepsilon. \tag{1.2}$$

Clearly

$$\mathbf{P}\left(\frac{\zeta_{\nu(t)}}{\sqrt{\nu(t)}}<x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}\left(\frac{\zeta_n}{\sqrt{n}}<x,\ \nu(t)=n\right). \tag{1.3}$$

It follows from (1.2) and (1.3) that for $t\geqq t_1$

$$\left|\mathbf{P}\left(\frac{\zeta_{\nu(t)}}{\sqrt{\nu(t)}}<x\right)-\sum_{|n-ct|\leqq\varepsilon ct}\mathbf{P}\left(\frac{\zeta_n}{\sqrt{n}}<x,\ \nu(t)=n\right)\right|\leqq\varepsilon. \tag{1.4}$$

Now let us put[2] $N_1=[c(1-\varepsilon)t]$ and $N_2=[c(1+\varepsilon)t]$. Then we have for $|n-ct|\leqq\varepsilon ct$

$$\mathbf{P}\left(\frac{\zeta_n}{\sqrt{n}}<x,\ \nu(t)=n\right)\leqq\mathbf{P}(\zeta_{N_1}<x\sqrt{N_2}+\varrho,\ \nu(t)=n) \tag{1.5}$$

where

$$\varrho=\max_{N_1\leqq n\leqq N_2}\left|\sum_{N_1\leqq k\leqq n}\xi_k\right|.$$

Similarly we obtain

$$\mathbf{P}\left(\frac{\zeta_n}{\sqrt{n}}<x,\ \nu(t)=n\right)\geqq\mathbf{P}(\zeta_{N_1}<x\sqrt{N_1}-\varrho,\ \nu(t)=n). \tag{1.6}$$

According to a well-known inequality due to A. N. KOLMOGOROV [6], we have

$$\mathbf{P}(\varrho\geqq\sqrt[3]{\varepsilon}\sqrt{N_1})\leqq\frac{(N_2-N_1)}{N_1\varepsilon^{2/3}}\leqq5\sqrt[3]{\varepsilon}\quad\text{if}\quad t\geqq\frac{1}{c\varepsilon}. \tag{1.7}$$

Let us denote by R the event $\varrho<\sqrt[3]{\varepsilon}\sqrt{N_1}$ and by E the event $|n-ct|<c\varepsilon t$.

Taking (1.4), (1.5), (1.6), (1.7) into account, it follows

$$\mathbf{P}\left(\frac{\zeta_{\nu(t)}}{\sqrt{\nu(t)}}<x\right)\leqq\mathbf{P}\left(\frac{\zeta_{N_1}}{\sqrt{N_1}}<x\sqrt{\frac{N_2}{N_1}}+\sqrt[3]{\varepsilon},\ RE\right)+6\sqrt[3]{\varepsilon} \tag{1.8}$$

[1] We denote by $\mathbf{P}(\ldots)$ the probability of the event in the brackets.

[2] We denote by $[\ldots]$ the integral part of the number in the square brackets.

and

$$\mathbf{P}\left(\frac{\zeta_{\nu(t)}}{\sqrt{\nu(t)}}<x\right) \geqq \mathbf{P}\left(\frac{\zeta_{N_1}}{\sqrt{N_1}}<x-\sqrt[3]{\varepsilon}, RE\right)-\varepsilon. \tag{1. 9}$$

It follows that

$$\mathbf{P}\left(\frac{\zeta_{N_1}}{\sqrt{N_1}}<x-\sqrt[3]{\varepsilon}\right)-7\sqrt[3]{\varepsilon} \leq \mathbf{P}\left(\frac{\zeta_{\nu(t)}}{\sqrt{\nu(t)}}<x\right) \leq \mathbf{P}\left(\frac{\zeta_{N_1}}{\sqrt{N_1}}<x\sqrt{\frac{1+2\varepsilon}{1-2\varepsilon}}+\sqrt[3]{\varepsilon}\right)+6\sqrt[3]{\varepsilon}.$$

By the central limit theorem we have (see e. g. [7], p. 215)

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{\zeta_n}{\sqrt{n}}<x\right)=\Phi(x)$$

where $\Phi(x)$ is defined by (1. 1). Thus we obtain, as $\Phi(x)$ is continuous, (1. 1).

§ 2. New proof of a theorem of L. Takács

In his paper [5] TAKÁCS has considered stochastic processes of the following type: $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n, \ldots$ are random points on the real axis,

$$\tau_0=0<\tau_1<\tau_2<\cdots<\tau_n<\cdots$$

such that putting

$$\tau_{2n+1}-\tau_{2n}=\xi_n \quad \text{and} \quad \tau_{2n+2}-\tau_{2n+1}=\eta_n \qquad (n=0, 1, \ldots) \tag{2. 1}$$

the positive random variables ξ_n, η_n are all independent, the variables ξ_n are all identically distributed with the cumulative distribution function $\mathbf{P}(\xi_n<x)=A(x)$ and the variables η_n are also identically distributed with the cumulative distribution function $\mathbf{P}(\eta_n<x)=B(x)$.

For any positive number $t>0$ let us put

$$\alpha(t)=\begin{cases} \xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n & \text{if} \quad \tau_{2n-1}\leqq t<\tau_{2n} \qquad (n=1, 2, \ldots), \\ \xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n+t-\tau_{2n} & \text{if} \quad \tau_{2n}\leqq t<\tau_{2n+1} \quad (n=0, 1, \ldots) \end{cases} \tag{2. 2}$$

and $\beta(t)=t-\alpha(t)$. By other words, if we interpret t as time, and consider a system which is at time t in state $\mathfrak{A}$ if $\tau_{2n}\leqq t<\tau_{2n+1}$ $(n=0, 1, \ldots)$ and in state $\mathfrak{B}$ if $\tau_{2n-1}\leqq t<\tau_{2n}$ $(n=1, 2, \ldots)$, then $\alpha(t)$ and $\beta(t)$ denotes the total time which the system has spent in state $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$, respectively, during the time interval $(0, t)$. TAKÁCS investigated the limiting distribution of the random variables $\alpha(t)$ and $\beta(t)$, respectively, for $t\to\infty$, and proved that if the first two moments of the random variables ξ_n and η_n exist, and if we put

$$\alpha=\int_0^\infty x\,dA(x) \quad \text{and} \quad \beta=\int_0^\infty x\,dB(x), \tag{2. 3}$$

further

$$(2.4) \qquad \sigma_\alpha^2 = \int_0^\infty (x-\alpha)^2 dA(x) \quad \text{and} \quad \sigma_\beta^2 = \int_0^\infty (x-\beta)^2 dB(x),$$

and finally

$$(2.5) \qquad a = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}, \qquad b = \frac{\beta}{\alpha+\beta} \quad \text{and} \quad D = \sqrt{\frac{\beta^2\sigma_\alpha^2 + \alpha^2\sigma_\beta^2}{(\alpha+\beta)^3}},$$

then $\frac{\alpha(t)-at}{D\sqrt{t}}$ and $\frac{\beta(t)-bt}{D\sqrt{t}}$ are asymptotically normal for $t\to+\infty$ with mean value 0 and variance 1.

Using Theorem 1 of § 1 we give a new proof of this fact which is somewhat simpler than that given by Takács.

Thus we prove the following

Theorem 2 (Takács). *If α, β, σ_α^2 and σ_β^2 exist, we have*

$$(2.6a) \qquad \lim_{t\to+\infty} \mathbf{P}\left(\frac{\alpha(t)-at}{D\sqrt{t}} < x\right) = \Phi(x)$$

and

$$(2.6b) \qquad \lim_{t\to+\infty} \mathbf{P}\left(\frac{\beta(t)-bt}{D\sqrt{t}} < x\right) = \Phi(x)$$

for $-\infty < x < +\infty$ *where*

$$(2.7) \qquad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

The proof is based besides Theorem 1 on three simple lemmas of which Lemma 1 and Lemma 2 are well known.

Lemma 1. *If $\chi(t)$, $\varepsilon(t)$ and $\delta(t)$ are random functions* $(0 < t < +\infty)$ *and are such that the asymptotic distribution of $\chi(t)$ exists, $\varepsilon(t)$ converges in probability to 1 and $\delta(t)$ converges in probability to 0 for $t\to+\infty$, then the asymptotic distribution of $\chi(t)\varepsilon(t)+\delta(t)$ exists also for $t\to+\infty$ and coincides with that of $\chi(t)$.*

Lemma 1 is contained in a theorem of H. Cramér ([7], p. 255), and therefore may be omitted.

Lemma 2. *If $\chi_n^{(1)}$, χ_n and $\chi_n^{(2)}$ are sequences of random variables such that $\chi_n^{(1)} \leq \chi_n \leq \chi_n^{(2)}$ and the sequences $\chi_n^{(1)}$ and $\chi_n^{(2)}$ have the same asymptotic distribution for $n\to+\infty$, then χ_n has also the same asymptotic distribution.*

The proof of Lemma 2 is evident and may be left to the reader. (As a matter of fact, Lemma 2 can be deduced also from Lemma 1.)

LEMMA 3. *Let $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ denote a sequence of identically distributed random variables, having the distribution function $F(x)$, and let us suppose that the second moment $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 dF(x)$ of the variables ξ_n exists. Let $\nu(t)$ denote a positive integer-valued random variable for $t>0$, for which $\frac{\nu(t)}{t}$ converges in probability to $c>0$ for $t \to +\infty$. Then $\frac{\xi_{\nu(t)}}{\sqrt{\nu(t)}}$ converges in probability to 0.*

PROOF OF LEMMA 3. Let us choose an $\varepsilon > 0$. Then we can find to any $\delta > 0$ a $t_1 > 0$ such that for $t \geqq t_1$

$$\mathbf{P}(|\nu(t)-ct| \geqq \varepsilon c) \leqq \delta. \tag{2.8}$$

Put further

$$N_1 = [c(1-\varepsilon)t] \quad \text{and} \quad N_2 = [c(1+\varepsilon)t]. \tag{2.9}$$

We have evidently

$$\mathbf{P}\left(\frac{|\xi_{\nu(t)}|}{\sqrt{\nu(t)}} > \varepsilon\right) \leqq \delta + \mathbf{P}\left(\frac{\operatorname*{Max}_{N_1 < n \leqq N_2} |\xi_n|}{\sqrt{N_1}} > \varepsilon\right) \tag{2.10}$$

and thus

$$\mathbf{P}\left(\frac{|\xi_{\nu(t)}|}{\sqrt{\nu(t)}} > \varepsilon\right) \leqq (N_2-N_1)(1-F(\varepsilon\sqrt{N_1})+F(-\varepsilon\sqrt{N_1}))+\delta. \tag{2.11}$$

As the existence of $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 dF(x)$ implies that

$$\lim_{x \to +\infty} x^2(1-F(x)) = \lim_{x \to +\infty} x^2 F(-x) = 0$$

and $\frac{N_2-N_1}{N_1}$ is bounded, further δ may be chosen as small as we like, it follows that

$$\lim_{t \to \infty} \mathbf{P}\left(\frac{|\xi_{\nu(t)}|}{\sqrt{\nu(t)}} > \varepsilon\right) = 0 \quad \text{for any} \quad \varepsilon > 0.$$

Thus Lemma 3 is proved.

Now we are in the position to prove Theorem 2.

Let us put

$$\zeta_n = \xi_n + \eta_n = \tau_{2n+1} - \tau_{2n-1} \qquad (n=1, 2, \ldots) \tag{2.12}$$

and let the positive integer-valued random variable $\nu(t)$ be defined for $t>0$ by the inequality

$$\tau_{2\nu(t)-1} \leqq t < \tau_{2\nu(t)+1}. \tag{2.13}$$

Clearly

$$\mathbf{P}(\nu(t) \leqq N) = \mathbf{P}(\zeta_1 + \zeta_2 + \cdots + \zeta_N > t) \qquad (N = 1, 2, \ldots) \tag{2. 14}$$

which implies that

$$\mathbf{P}\left(\frac{\nu(t)}{t} < x\right) = \mathbf{P}\left(\frac{\zeta_1 + \zeta_2 + \cdots + \zeta_{[tx]}}{[tx]} > \frac{t}{[tx]}\right). \tag{2. 15}$$

As the law of large numbers (see e. g. [7], p. 253) clearly applies to the random variables ζ_n, which are independent, identically distributed, and their mean value is $\alpha + \beta$, we have

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{P}\left(\frac{\zeta_1 + \zeta_2 + \cdots + \zeta_n}{n} > y\right) = \begin{cases} 0 & \text{for } y > \alpha + \beta, \\ 1 & \text{for } y < \alpha + \beta. \end{cases} \tag{2. 16}$$

(2. 15) and (2. 16) imply that $\frac{\nu(t)}{t}$ *converges in probability to* $\frac{1}{\alpha + \beta}$ *for* $t \to +\infty$. (This fact is well known (see e. g. [8]); we proved it only for the sake of completeness.) Now let us put

$$\vartheta_k = \frac{\beta \xi_k - \alpha \eta_k}{(\alpha + \beta)^{3/2}} \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{2. 17}$$

Then we have

$$\sum_{k=1}^{\nu(t)} \vartheta_k - \frac{\xi_{\nu(t)+1}}{\sqrt{\alpha + \beta}} \leqq \frac{\alpha(t) - at}{\sqrt{\alpha + \beta}} \leqq \sum_{k=1}^{\nu(t)} \vartheta_k + \frac{\xi_{\nu(t)+1} + \eta_{\nu(t)}}{\sqrt{\alpha + \beta}}. \tag{2. 18}$$

As the random variables ϑ_k are independent, identically distributed, and have the mean value 0 and the variance D^2, it follows by Theorem 1 that

$$\lim_{t \to \infty} \mathbf{P}\left(\frac{\sum_{k=1}^{\nu(t)} \vartheta_k}{D\sqrt{\nu(t)}} < x\right) = \Phi(x). \tag{2. 19}$$

On the other hand, it follows from Lemma 3 (which can be applied as the random variables ξ_n and η_n have finite variances) that

$$\frac{\xi_{\nu(t)+1}}{\sqrt{\nu(t)}} \quad \text{and} \quad \frac{\xi_{\nu(t)+1} + \eta_{\nu(t)}}{\sqrt{\nu(t)}}$$

are converging in probability to 0. Thus, by Lemma 1, the random variables

$$\frac{\sum_{k=1}^{\nu(t)} \vartheta_k + \frac{\xi_{\nu(t)+1} + \eta_{\nu(t)}}{\sqrt{\alpha + \beta}}}{D\sqrt{\nu(t)}} \quad \text{and} \quad \frac{\sum_{k=1}^{\nu(t)} \vartheta_k - \frac{\xi_{\nu(t)+1}}{\sqrt{\alpha + \beta}}}{D\sqrt{\nu(t)}}$$

are both asymptotically normal for $t \to +\infty$. By virtue of (2. 18) and Lemma 2

we obtain

(2. 20)
$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{\alpha(t)-at}{D\sqrt{(\alpha+\beta)\nu(t)}}<x\right)=\Phi(x).$$

Taking into account that $\frac{\nu(t)(\alpha+\beta)}{t}$ converges in probability to 1 for $t\to+\infty$, and using again Lemma 1, we may replace $(\alpha+\beta)\nu(t)$ by t in (2. 20), what proves (2. 6a). Clearly, (2. 6b) follows from (2. 6a), in view of

(2. 21)
$$\beta(t)-bt=at-\alpha(t).$$

This completes the proof.

(Received 6 March 1957)

References

[1] H. Robbins, The asymptotic distribution of the sum of a random number of random variables, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **54** (1948), pp. 1151—1161.

[2] M. Loève, *Probability theory* (New York, 1955), p. 384 and 407.

[3] Р. Л. Добрушин, Лемма о пределе сложной случайной функции, Усп. Мат. Наук, **10** (1955), вып. 2 (64), pp. 157—159.

[4] F. J. Anscombe, Large-sample theory of sequential estimation, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **48** (1952), p. 600.

[5] L. Takács, On certain sojourn time problems in the theory of stochastic processes, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **8** (1957), pp. 169—191.

[6] A. Kolmogoroff, *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Ergebnisse der Math. II, No. 3 (Berlin, 1933).

[7] H. Cramér, *Mathematical methods of statistics*, (Princeton, 1946), pp. 254—255.

[8] J. L. Doob, Renewal theory from the point of view of the theory of probability, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **63** (1948), pp. 422—438.

NOTES ON INTERPOLATION. II
(EXPLICIT FORMULAE)

By
J. BALÁZS (Budapest) and P. TURÁN (Budapest), member of the Academy

1. As far as we know in all but three papers on interpolation[1, 2, 3] always that case was investigated, when at the fundamental points of the interpolation the function values and *consecutive derivatives* were prescribed. To consider the simplest case, in which this is *not* the case, the first note of this series[3] dealt with the following problem: Given n distinct points $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ with

$$-1 \leqq \xi_n < \xi_{n-1} < \cdots < \xi_1 \leqq +1$$

and arbitrary

$$b_1, b_2, \ldots, b_n,$$
$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$$

numbers, it is to be decided whether or not there is a polynomial $R_n(x)$ of degree $\leqq 2n-1$ such that

$$\text{(1.1)} \qquad \begin{aligned} &R_n(\xi_\nu) = b_\nu, \\ &R_n''(\xi_\nu) = \beta_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned}$$

For the sake of brevity we shall call that sort of interpolation sometimes as "(0, 2) interpolation". Already this case turned out in the paper quoted under [3] to present new difficulties; further that the most convenient selections of the ξ_ν-numbers happen when we choose for them the n different real x_ν-zeros

$$\text{(1.2)} \qquad -1 = x_n < x_{n-1} < \cdots < x_2 < x_1 = +1$$

of the polynomial

$$\text{(1.3)} \qquad \Pi_n(x) = -n(n-1)\int_{-1}^{x} P_{n-1}(t)\,dt = (1-x^2)P_{n-1}'(x) \qquad (n = 2, 3, \ldots)$$

where $P_{n-1}(t)$, as usual, stands for the $(n-1)^{\text{th}}$ Legendre polynomial with

[1] G. D. Birkhoff, General mean value and remainder theorems with applications to mechanical differentiation and quadrature, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **7** (1906), pp. 107—136.

[2] G. Pólya, Bemerkung zur Interpolation und zur Näherungstheorie der Balkenbiegung, *Zeitschr. für angew. Math. und Mech.*, **11** (1931), pp. 445—449.

[3] J. Surányi and P. Turán, Notes on Interpolation. I (On some interpolatorical properties of the ultraspherical polynomials), *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **6** (1955), pp. 67—79.

the normalisation

(1.4) $$P_{n-1}(1)=1.$$

In this paper we consider the (0, 2)-interpolation exclusively *with this choice* of the fundamental points ξ_ν what we shall call for the sake of brevity Π-matrix. In the paper quoted under [3] we showed that if n is odd, then the polynomials $R_n(x)$ belonging to the Π-matrix do not exist in general. But they are *uniquely* determined when n is even; by other words if n is even and

(1.5) $$b_\nu=\beta_\nu=0 \qquad (\nu=1,2,\ldots,n),$$

then the *only* polynomial of degree $\leqq 2n-1$ satisfying (1.1) vanishes identically. In what follows we shall suppose throughout this paper n being even:

(1.6) $$n=2k.$$

In the paper quoted under [3] we mentioned the further problems of explicit representation of our $R_n(x)$-polynomials and that of the convergence. In this paper we shall solve the problem of the explicit representation. In the third paper of this series these results will be applied to prove convergence theorems and to give upper bounds for

(1.7) $$\max_{-1\leqq x\leqq+1}|f(x)| \quad\text{and}\quad \max_{-1\leqq x\leqq+1}|f'(x)|$$

by

(1.8) $$\max_{\nu=1,2,\ldots,n}|f(x_\nu)| \quad\text{and}\quad \max_{\nu=1,2,\ldots,n}|f''(x_\nu)|,$$

respectively, where $f(x)$ is an arbitrary polynomial of degree $\leqq 2n-1$. In the fourth paper of this series all these results will be applied to the theory of the equation[4]

(1.9) $$y''(x)+A(x)y(x)=0.$$

2. For $R_{2k}(x)$ we have evidently the form

(2.1) $$R_{2k}(x)=\sum_{\nu=1}^{2k}b_\nu r_\nu(x)+\sum_{\nu=1}^{2k}\beta_\nu\varrho_\nu(x),$$

where the polynomials $r_\nu(x)$ and $\varrho_\nu(x)$,[5] the fundamental polynomials of first and of second kind of the (0, 2)-interpolation belonging to the x_j-points, respectively, are polynomials of degree $\leqq 2n-1=4k-1$ uniquely deter-

[4] This fact lends interest also to the analogous questions, when the fundamental points are the zeros of Laguerre and Hermite polynomials, respectively, which shall be treated later in the dissertation of the first of us.

[5] The polynomials $r_\nu(x)$ and $\varrho_\nu(x)$ as well as the x_ν's depend, of course, also upon k; the omission of this, however, will not lead to misunderstandings.

mined by the following requirements for $\nu=1,2,\ldots,n$:

(2. 2) $$r_\nu(x_j)=\begin{cases}1 & \text{for } j=\nu\\ 0 & \text{for } j\neq\nu\end{cases}\qquad (j=1,2,\ldots,n),$$

(2. 3) $$r_\nu''(x_j)=0\qquad (j=1,2,\ldots,n)$$

and

(2. 4) $$\varrho_\nu(x_j)=0\qquad (j=1,2,\ldots,n),$$

(2. 5) $$\varrho_\nu''(x_j)=\begin{cases}1 & \text{for } j=\nu\\ 0 & \text{for } j\neq\nu\end{cases}\qquad (j=1,2,\ldots,n),$$

respectively. In what follows we shall explicitly determine these fundamental polynomials $r_\nu(x)$ and $\varrho_\nu(x)$. To this we shall need some properties[6] of $\Pi_n(x)$. For this the equation

(2. 6) $$(1-x^2)\Pi_n''(x)+n(n-1)\Pi_n(x)=0$$

holds, i. e.

(2. 7) $$\Pi_n''(x_j)=0\qquad (j=2,3,\ldots,n-1).$$

(2. 6) gives at once

(2. 8) $$\Pi_n''(1)=-n(n-1)\lim_{x\to1}\frac{\Pi_n(x)}{1-x^2}=\frac{n(n-1)}{2}\Pi_n'(1)=-\frac{n^2(n-1)^2}{2}$$

from (1. 3) and (1. 4). Similarly we have

(2. 9) $$\Pi_n''(-1)=-\frac{n^2(n-1)^2}{2}.$$

We shall denote by $l_\nu(x)$ the fundamental polynomials of the Lagrange interpolation based on the x_ν-points, i. e.

(2. 10) $$l_\nu(x)=\frac{\Pi_n(x)}{\Pi_n'(x_\nu)(x-x_\nu)}\left(=\frac{\Pi_n(x)}{-n(n-1)P_{n-1}(x_\nu)(x-x_\nu)}\right).$$

We shall make repeated use of an observation of Fejér[7] that

(2. 11) $$l_\nu'(x_\nu)=0\qquad (\nu=2,3,\ldots,n-1).$$

Further we have

(2. 12) $$l_\nu(x_j)=\begin{cases}1 & \text{for } j=\nu\\ 0 & \text{for } j\neq\nu\end{cases}\qquad (j=1,2,\ldots,n).$$

[6] For general reference see the book of G. Szegő, *Orthogonal polynomials*, Amer. Math. Soc. Coll. Publ., Vol. XXIII (1939).

[7] L. Fejér, Bestimmung derjenigen Abszissen eines Intervalles, für welche die Quadratsumme der Grundfunktionen der Lagrangeschen Interpolation im Intervalle ein möglichst kleines Maximum besitzt, *Annali della Sc. Norm. Sup. di Pisa* (2), 1 (1932), pp. 3—16.

About the Legendre polynomials $P_\nu(x)$ we need the following facts beside (1.4):

$$P_\nu'(1)=P_\nu'(-1)=\frac{\nu(\nu+1)}{2} \qquad (\nu \text{ odd}). \tag{2.13}$$

The zeros of $P_\nu(x)$ as well as these of $P_\nu'(x)$ are simple and lie in $(-1,+1)$. $P_\nu(x)$ satisfies the differential equation

$$(1-x^2)P_\nu''(x)-2xP_\nu'(x)+\nu(\nu+1)P_\nu(x)=0. \tag{2.14}$$

We shall need the fact that

$$\int_{-1}^{+1} P_\mu'(t)P_\nu'(t)(1-t^2)\,dt=0 \qquad (\mu\neq\nu) \tag{2.15}$$

and[8] for $m\geqq 2$

$$\frac{P_m'(x)P_{m-1}'(y)-P_m'(y)P_{m-1}'(x)}{m(x-y)}=\sum_{j=2}^{m}\frac{2j-1}{j(j-1)}P_{j-1}'(x)P_{j-1}'(y). \tag{2.16}$$

Further we need the formula[9]

$$mP_m(x)=xP_m'(x)-P_{m-1}'(x). \tag{2.17}$$

As the first explicit interpolatorical formulae of the mentioned kind in the literature we assert the following

THEOREM. *For the fundamental functions $r_\nu(x)$ and $\varrho_\nu(x)$ the following explicit form can be given:*

a)

$$\varrho_1(x)=-\frac{\Pi_n(x)}{n^2(n-1)^2}\left\{1+\frac{1}{3}P_{n-1}(x)\right\},$$

$$\varrho_n(x)=\frac{\Pi_n(x)}{n^2(n-1)^2}\left\{-1+\frac{1}{3}P_{n-1}(x)\right\};$$

b)[10] *for $2\leqq\nu\leqq n-1$ we have*

$$\varrho_\nu(x)=\frac{\Pi_n(x)}{4n^2(n-1)^2P_{n-1}(x_\nu)^2}\left\{(1-x_\nu^2)\int_1^x\frac{P_{n-1}'(t)}{t-x_\nu}dt+\right.$$

$$\left.+(1-x_\nu^2)\int_1^x\frac{P_{n-1}'(t)}{t-x_\nu}dt+2P_{n-1}(x)\left[-x_\nu+\frac{1}{3P_{n-1}(x_\nu)}\right]-4\right\};$$

[8] See e. g. SZEGŐ, l. c., p. 70.

[9] See SZEGŐ, l. c., p. 84, formula (4. 7. 28).

[10] The form b) contains obviously also the cases $\nu=1$ and $\nu=n$; however, we keep them separately since we did not succeed in a unified treatment.

c) *for* $2 \leqq \nu \leqq n-1$ *we have*

$$r_\nu(x) = (l_\nu(x))^2 + \frac{\Pi_n(x)}{2n(n-1)P_{n-1}(x_\nu)} \left\{ \int_1^x \frac{l'_\nu(t)}{t-x_\nu}\,dt + \int_1^x \frac{l'_\nu(t)}{t-x_\nu}\,dt + \right.$$

$$\left. + \frac{P_{n-1}(x)}{3(1-x_\nu^2)P_{n-1}(x_\nu)^2} \right\};$$

d)

$$r_1(x) = \frac{3+x}{4}(l_1(x))^2 - \frac{1-x^2}{4} l_1(x) l'_1(x) +$$

$$+ \left(\frac{5}{16} + \frac{1}{8n(n-1)} \right) \Pi_n(x) \left\{ 1 + \frac{1}{3} P_{n-1}(x) \right\},$$

$$r_n(x) = \frac{3-x}{4}(l_n(x))^2 + \frac{1-x^2}{4} l_n(x) l'_n(x) +$$

$$+ \left(\frac{5}{16} + \frac{1}{8n(n-1)} \right) \Pi_n(x) \left\{ 1 - \frac{1}{3} P_{n-1}(x) \right\}.$$

There are in the text also alternative formulae, some of whose are easier to verify. A particularly simple expression for $r_\nu(x) + r_{\nu+1}(x)$ is to be found in section 11.

3. The easiest will be the determination of $\varrho_1(x)$ and $\varrho_n(x)$. For these we have

Part a)

$$\varrho_1(x) = -\frac{\Pi_n(x)}{n^2(n-1)^2} \left\{ 1 + \frac{1}{3} P_{n-1}(x) \right\},$$

$$\varrho_n(x) = \frac{\Pi_n(x)}{n^2(n-1)^2} \left\{ -1 + \frac{1}{3} P_{n-1}(x) \right\}.$$

For the proof it is enough to consider $\varrho_1(x)$. The polynomial

$$\mu_1(x) \equiv -\frac{\Pi_n(x)}{n^2(n-1)^2} \left\{ 1 + \frac{1}{3} P_{n-1}(x) \right\}$$

is of degree $(2n-1)$ and obviously we have

$$\mu_1(x_j) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Further we have for $j = 2, 3, \ldots, n-1$, using (2. 7) and (1. 3),

$$\mu''_1(x_j) = -\frac{2\Pi'_n(x_j)}{n^2(n-1)^2} \cdot \frac{1}{3} P'_{n-1}(x_j) = 0.$$

Finally, from (1. 4), (1. 3), (2. 13) and (2. 8) we have

$$\mu''_1(x_1) = \mu''_1(1) = -\frac{2\Pi'_n(1)}{n^2(n-1)^2} \cdot \frac{1}{3} P'_{n-1}(1) - \frac{\Pi''_n(1)}{n^2(n-1)^2} \cdot \frac{4}{3} = 1,$$

and owing to the evenness of n

$$\mu_1''(x_n)=\mu_1''(-1)=-\frac{2\Pi_n'(-1)}{n^2(n-1)^2}\cdot\frac{1}{3}P_{n-1}'(-1)-\frac{\Pi_n''(-1)}{n^2(n-1)^2}\cdot\frac{2}{3}=0.$$

Owing to the quoted uniqueness theorem (1. 5) we have

$$\mu_1(x)\equiv\varrho_1(x).$$

Q. e. d.

4. *Part b)* will be essentially settled by the

LEMMA 4. 1. *For $\nu=2,3,\ldots,n-1$ the representation*

$$(4.1)\qquad \varrho_\nu(x)=\frac{\Pi_n(x)}{2\Pi_n'(x_\nu)P_{n-1}''(x_\nu)}\left\{\int_1^x\frac{P_{n-1}'(t)}{t-x_\nu}dt-\right.$$
$$\left.-P_{n-1}(x)\left[\frac{2}{3}\frac{x_\nu}{1-x_\nu^2}+\frac{1}{6}\int_{-1}^{1}\frac{P_{n-1}'(t)}{t-x_\nu}dt\right]-\left[\frac{2}{1-x_\nu^2}+\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{P_{n-1}'(t)}{t-x_\nu}dt\right]\right\}$$

holds.

PROOF. Since for the x_ν-numbers with $2\leqq\nu\leqq n-1$

$$(4.2)\qquad P_{n-1}'(x_\nu)=0$$

and all zeros of $P_{n-1}'(x)$ are simple, the expression on the right has a sense and represents a polynomial of degree $2n-1$. Owing to the uniqueness theorem (1. 5) we have only to verify (2. 4) and (2. 5). Trying to determine $\varrho_\nu(x)$ in the form

$$(4.3)\qquad \mu_\nu(x)=c_1\Pi_n(x)\left\{\int_{-1}^{x}\frac{P_{n-1}'(t)}{t-x_\nu}dt+c_2P_{n-1}(x)+c_3\right\}$$

with constants c_1, c_2, c_3 to be determined suitably we see at once the relations

$$\mu_\nu(x_j)=0\qquad (j=1,2,\ldots,n)$$

are true at *any* choice of c_1, c_2, c_3. Next we consider $\mu_\nu''(x_j)$ for $2\leqq j\leqq n-1$ and $j\neq\nu$. Using (2. 7) and (4. 2) we get at once

$$\mu_\nu''(x_j)=0\qquad (2\leqq j\leqq n-1,\ j\neq\nu),$$

again at *any* choice of c_1, c_2, c_3. For $j=\nu$ we obtain similarly

$$\mu_\nu''(x_\nu)=2c_1\Pi_n'(x_\nu)\left\{\lim_{x\to x_\nu}\frac{P_{n-1}'(x)}{x-x_\nu}\right\}=2c_1\Pi_\nu'(x_\nu)P_{n-1}''(x_\nu)=1,$$

when we choose

$$c_1=\frac{1}{2\Pi_n'(x_\nu)P_{n-1}''(x_\nu)}.$$

In order to assure the validity of the remaining two conditions

$$\mu_\nu''(\pm 1) = 0,$$

we obtain at once two linear equations for c_2 and c_3; these give indeed the values indicated in Lemma 4. 1. Q. e. d.

5. The form of $\varrho_\nu(x)$ given in Lemma 4. 1 was perhaps the simplest to verify. But there are many alternative forms of it. To obtain a more symmetrical one we write

$$\int_{-1}^{x} \frac{P_{n-1}'(t)}{t-x_\nu}\,dt = \int_{-1}^{1} \frac{P_{n-1}'(t)}{t-x_\nu}\,dt - \int_{x}^{1} \frac{P_{n-1}'(t)}{t-x_\nu}\,dt;$$

thus from Lemma 4. 1 for $2 \leqq \nu \leqq n-1$

$$\varrho_\nu(x) = \frac{\Pi_n(x)}{2\Pi_n'(x_\nu)P_{n-1}''(x_\nu)} \left\{ -\int_{x}^{1} \frac{P_{n-1}'(t)}{t-x_\nu}\,dt - c_2 P_{n-1}(x) - \right.$$

$$\left. - \left[\frac{2}{1-x_\nu^2} - \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \frac{P_{n-1}'(t)}{t-x_\nu}\,dt \right] \right\}.$$

Adding this to (4. 1) we obtain the more symmetrical form

(5. 1)
$$\varrho_\nu(x) = \frac{\Pi_n(x)}{4\Pi_n'(x_\nu)P_{n-1}''(x_\nu)} \left\{ \int_{1}^{x} \frac{P_{n-1}'(t)}{t-x_\nu}\,dt + \int_{-1}^{x} \frac{P_{n-1}'(t)}{t-x_\nu}\,dt - \right.$$

$$\left. -2P_{n-1}(x) \left[\frac{2}{3} \frac{x_\nu}{1-x_\nu^2} + \frac{1}{6} \int_{-1}^{1} \frac{P_{n-1}'(t)}{t-x_\nu}\,dt \right] - \frac{4}{1-x_\nu^2} \right\}.$$

Owing to (2. 14) we have

$$(1-x_\nu^2)\,P_{n-1}''(x_\nu) = -n(n-1)P_{n-1}(x_\nu),$$

and since from (1. 3) we have

$$\Pi_n'(x_\nu) = -n(n-1)P_{n-1}(x_\nu),$$

(5. 1) gives

(5. 2)
$$\varrho_\nu(x) = \frac{\Pi_n(x)(1-x_\nu^2)}{4n^2(n-1)^2 P_{n-1}(x_\nu)^2} \left\{ \int_{1}^{x} \frac{P_{n-1}'(t)}{t-x_\nu}\,dt + \int_{-1}^{x} \frac{P_{n-1}'(t)}{t-x_\nu}\,dt - \right.$$

$$\left. -2P_{n-1}(x) \left[\frac{2}{3} \frac{x_\nu}{1-x_\nu^2} + \frac{1}{6} \int_{1}^{1} \frac{P_{n-1}'(t)}{t-x_\nu}\,dt \right] - \frac{4}{1-x_\nu^2} \right\}.$$

6. To obtain an alternative form for the $\varrho_\nu(x)$'s we need the

LEMMA 6. 1. *For even n we have*

$$\int_{-1}^{1} \frac{P'_{n-1}(t)}{t-x_\nu}\,dt = \frac{2x_\nu}{1-x_\nu^2} - \frac{2}{1-x_\nu^2}\,\frac{1}{P_{n-1}(x_\nu)} \qquad (\nu = 2, 3, \ldots, n-1).$$

PROOF. Since

$$(1-x_\nu^2)\int_{-1}^{1} \frac{P'_{n-1}(t)}{t-x_\nu}\,dt = \int_{-1}^{1} (1-t^2)\,\frac{P'_{n-1}(t)}{t-x_\nu}\,dt + \int_{-1}^{1} (t^2-x_\nu^2)\,\frac{P'_{n-1}(t)}{t-x_\nu}\,dt$$

and

$$\int_{-1}^{1} (t^2-x_\nu^2)\,\frac{P'_{n-1}(t)}{t-x_\nu}\,dt = \int_{-1}^{1} (t+x_\nu)P'_{n-1}(t)\,dt = (1+x_\nu)+(-1+x_\nu) = 2x_\nu,$$

we have

$$\int_{-1}^{1} \frac{P'_{n-1}(t)}{t-x_\nu}\,dt = \frac{2x_\nu}{1-x_\nu^2} + \frac{1}{1-x_\nu^2}\int_{-1}^{1} (1-t^2)\,\frac{P'_{n-1}(t)}{t-x_\nu}\,dt. \tag{6. 1}$$

Putting

$$m = n-1, \quad y = x_\nu, \quad x = t$$

(2. 16) gives

$$\frac{P'_{n-1}(t)P'_{n-2}(x_\nu)}{(n-1)(t-x_\nu)} = \sum_{j=2}^{n-1} \frac{2j-1}{j(j-1)}\,P'_{j-1}(x_\nu)P'_{j-1}(t)$$

and thus, owing to (2. 15),

$$\frac{P'_{n-2}(x_\nu)}{n-1}\int_{1}^{1} (1-t^2)\,\frac{P'_{n-1}(t)}{t-x_\nu}\,dt = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} (1-t^2)\,dt = 2.$$

So (6. 1) gives

$$\int_{-1}^{1} \frac{P'_{n-1}(t)}{t-x_\nu}\,dt = \frac{2x_\nu}{1-x_\nu^2} + \frac{1}{1-x_\nu^2}\,\frac{2(n-1)}{P'_{n-2}(x_\nu)}. \tag{6. 2}$$

But using (2. 17) with

$$m = n-1, \quad x = x_\nu$$

we get

$$P'_{n-2}(x_\nu) = -(n-1)P_{n-1}(x_\nu)$$

which together with (6. 2) completes the proof of the lemma.

Taking Lemma 6.1 and (5.2) into account $\varrho_\nu(x)$ takes for $\nu=2,3,\dots,n-1$ the form announced in b) of the theorem:

$$
(6.3)\quad
\begin{aligned}
\varrho_\nu(x) = \frac{\Pi_n(x)}{4n^2(n-1)^2P_{n-1}(x_\nu)^2}\Bigg\{(1-x_\nu^2)\int_1^x \frac{P'_{n-1}(t)}{t-x_\nu}\,dt+(1-x_\nu^2)\int_{-1}^x \frac{P'_{n-1}(t)}{t-x_\nu}\,dt+\\
+2P_{n-1}(x)\left[-x_\nu+\frac{1}{3P_{n-1}(x_\nu)}\right]-4\Bigg\}.
\end{aligned}
$$

7. Next we turn to the determination of the fundamental functions $r_\nu(x)$ of the first kind. Here those with $2\leq \nu\leq n-1$ are the more convenient ones.

Part c) will be essentially settled by the

LEMMA 7.1. *For $2\leq\nu\leq n-1$ we have the explicit form*

$$
r_\nu(x) = (l_\nu(x))^2+\frac{\Pi_n(x)}{\Pi'_n(x_\nu)}\Bigg\{\int_x^1 \frac{l'_\nu(t)}{t-x_\nu}\,dt+\frac{(P_{n-1}(x)-3)}{6}\int_{-1}^1 \frac{l'_\nu(t)}{t-x_\nu}\,dt\Bigg\}.
$$

For the proof of this theorem we remark first of all that owing to FEJÉR's remark (2.11) the right-hand side is indeed a polynomial of degree $\leq 2n-1$ and thus owing to the uniqueness theorem it is sufficient to verify (2.2) and (2.3). (2.2) is evident, since for $j=1,2,\dots,n$ we have, denoting the right-hand side by $v_\nu(x)$, indeed

$$v_\nu(x_j)=(l_\nu(x_j))^2.$$

In order to verify (2.3) we have for $2\leq j\leq n-1$, $j\neq\nu$, owing to (2.12), (2.7), (1.3) and (2.10),

$$
(7.1)\quad
\begin{aligned}
v''_\nu(x_j) &= 2(l'_\nu(x_j))^2-2\frac{\Pi'_n(x_j)}{\Pi'_n(x_\nu)}\frac{l'_\nu(x_j)}{x_j-x_\nu}=\\
&=2l'_\nu(x_j)\left\{l'_\nu(x_j)-\frac{\Pi'_n(x_j)}{\Pi'_n(x_\nu)(x_j-x_\nu)}\right\}=0.
\end{aligned}
$$

If $j=\nu$, then we have owing to (2.11), (2.7) and (1.3)

$$v''_\nu(x_\nu)=0.$$

Thus we have only to prove that

$$v''_\nu(1)=v''_\nu(-1)=0.$$

We have

$$
\begin{aligned}
v''_\nu(1) = 2(l'_\nu(1))^2+2\frac{\Pi'_n(1)}{\Pi'_n(x_\nu)}\Bigg\{-\frac{l'_\nu(1)}{1-x_\nu}+\frac{P'_{n-1}(1)}{6}\int_{-1}^1\frac{l'_\nu(t)}{t-x_\nu}\,dt\Bigg\}-\\
-\frac{1}{3}\frac{\Pi''_n(1)}{\Pi'_n(x_\nu)}\int_{-1}^1\frac{l'_\nu(t)}{t-x_\nu}\,dt.
\end{aligned}
$$

The sum of the first two terms is 0 as in (7. 1); the sum of the remaining two terms is

$$\frac{1}{3\Pi_n'(x_\nu)}\int_{-1}^{1}\frac{l_\nu'(t)}{t-x_\nu}dt\{\Pi_n'(1)P_{n-1}'(1)-\Pi_n''(1)\}=0,$$

owing to (2. 9), (1. 3) and (2. 13). Thus we have only to show that $r_\nu''(-1)=0$. Owing to the parity of n we have

$$r_\nu''(-1)=2(l_\nu'(-1))^2+2\frac{\Pi_n'(-1)}{\Pi_n'(x_\nu)}\left\{-\frac{l_\nu'(-1)}{-1-x_\nu}+\frac{n(n-1)}{12}\int_{-1}^{1}\frac{l_\nu'(t)}{t-x_\nu}dt\right\}+$$

$$+\frac{\Pi_n''(-1)}{\Pi_n'(x_\nu)}\frac{1}{3}\int_{-1}^{1}\frac{l_\nu'(t)}{t-x_\nu}dt\Big\}.$$

The sum of the first two terms is again 0 as in (7. 1) and that of the remaining two terms, owing to (1. 3) and (2. 9), too. Hence $r_\nu(x)\equiv r_\nu(x)$ indeed.

8. The form of $r_\nu(x)$ given in Lemma 7. 1 was perhaps the simplest to verify. But there are many alternative forms of it. First of all

$$(8.1)\qquad r_\nu(x)=(l_\nu(x))^2+\frac{\Pi_n(x)}{\Pi_n'(x_\nu)}\left\{\int_x^1\frac{l_\nu'(t)}{t-x_\nu}dt+\frac{(P_{n-1}(x)-3)}{6}\int_{-1}^{1}\frac{l_\nu'(t)}{t-x_\nu}dt\right\}.$$

To obtain a more symmetrical form we use

$$\int_x^1\frac{l_\nu'(t)}{t-x_\nu}dt=\int_{-1}^{1}\frac{l_\nu'(t)}{t-x_\nu}dt+\int_x^{-1}\frac{l_\nu'(t)}{t-x_\nu}dt,$$

i. e. from (8. 1) we get

$$r_\nu(x)=(l_\nu(x))^2+\frac{\Pi_n(x)}{\Pi_n'(x_\nu)}\left\{\int_x^1\frac{l_\nu'(t)}{t-x_\nu}dt+\frac{(P_{n-1}(x)+3)}{6}\int_{1}^{1}\frac{l_\nu'(t)}{t-x_\nu}dt\right\}.$$

Adding to (8. 1) we obtain the more symmetrical form

$$r_\nu(x)=(l_\nu(x))^2+\frac{\Pi_n(x)}{2\Pi_n'(x_\nu)}\left\{\int_x^1\frac{l_\nu'(t)}{t-x_\nu}dt+\int_x^{-1}\frac{l_\nu'(t)}{t-x_\nu}dt+\frac{P_{n-1}(x)}{3}\int_{-1}^{1}\frac{l_\nu'(t)}{t-x_\nu}dt\right\},$$

and using (1. 3) we have

$$r_\nu(x)=(l_\nu(x))^2-\frac{\Pi_n(x)}{2n(n-1)P_{n-1}(x_\nu)}\left\{\int_x^1\frac{l'_\nu(t)}{t-x_\nu}dt+\int_x^1\frac{l'_\nu(t)}{t-x_\nu}dt+\right.\tag{8.2}$$
$$\left.+\frac{P_{n-1}(x)}{3}\int_{-1}^1\frac{l'_\nu(t)}{t-x_\nu}dt\right\}.$$

9. To obtain an alternative form for the $r_\nu(x)$'s we need the

LEMMA 9. 1. *We have for* $\nu=2,3,\dots,n-1$

$$\int_{-1}^1\frac{l'_\nu(t)}{t-x_\nu}dt=-\frac{1}{(1-x_\nu^2)P_{n-1}(x_\nu)^2}.$$

PROOF. First we deduce a differential equation of second order for the fundamental functions $l_\nu(t)$ $(\nu=2,3,\dots,n-1)$. Since

$$l_\nu(t)(t-x_\nu)=\frac{\Pi_n(x)}{\Pi'_n(x_\nu)},\tag{9.1}$$

(2. 6) gives

$$(1-t^2)\{(t-x_\nu)l_\nu(t)\}''+n(n-1)(t-x_\nu)l_\nu(t)=0$$

or

$$(1-t^2)(t-x_\nu)l''_\nu(t)+2(1-t^2)l'_\nu(t)+n(n-1)(t-x_\nu)l_\nu(t)=0.\tag{9.2}$$

Dividing by $2(1-t^2)(t-x_\nu)$ and integrating between ±1 we obtain, using (9. 1) and (1. 3),

$$\int_{-1}^1\frac{l'_\nu(t)}{t-x_\nu}dt=-\frac{1}{2}[l'_\nu(1)-l'_\nu(-1)]+\frac{1}{2P_{n-1}(x_\nu)}\int_{-1}^1\frac{P'_{n-1}(t)}{t-x_\nu}dt.\tag{9.3}$$

Lemma 6. 1 gives for the second term on the right the value

$$\frac{x_\nu}{(1-x_\nu^2)P_{n-1}(x_\nu)}-\frac{1}{(1-x_\nu^2)P_{n-1}(x_\nu)^2}.\tag{9.4}$$

For $l'_\nu(1)$ we have from (9. 1) and (1. 3)

$$l'_\nu(1)=\frac{1}{\Pi'_n(x_\nu)}\frac{\Pi'_n(1)}{1-x_\nu}=\frac{1}{(1-x_\nu)P_{n-1}(x_\nu)}.$$

Similarly we obtain

$$l'_\nu(-1)=\frac{1}{(1+x_\nu)P_{n-1}(x_\nu)},$$

and from this, (9. 3) and (9. 4) the lemma follows.

Taking Lemma 9.1 into account $r_\nu(x)$ assumes for $\nu=2,3,\ldots,n-1$ from (8.2) the form

$$r_\nu(x)=(l_\nu(x))^2+\frac{\Pi_n(x)}{2n(n-1)P_{n-1}(x_\nu)}\left\{\int_1^x\frac{l'_\nu(t)}{t-x_\nu}\,dt+\int_{-1}^x\frac{l'_\nu(t)}{t-x_\nu}\,dt+\right.$$
(9.5)
$$\left.+\frac{P_{n-1}(x)}{3(1-x_\nu^2)P_{n-1}(x_\nu)^2}\right\},$$

as announced in c) of our theorem.

10. Next we turn to the determination of $r_1(x)$ and $r_n(x)$. This will be done by the

Part d) We have

$$r_1(x)=\frac{3+x}{4}(l_1(x))^2-\frac{1-x^2}{4}l_1(x)l'_1(x)+$$
$$+\left(\frac{5}{16}+\frac{1}{8n(n-1)}\right)\Pi_n(x)\left\{1+\frac{1}{3}P_{n-1}(x)\right\}$$

and

$$r_n(x)=\frac{3-x}{4}(l_n(x))^2+\frac{1-x^2}{4}l_n(x)l'_n(x)+$$
$$+\left(\frac{5}{16}+\frac{1}{8n(n-1)}\right)\Pi_n(x)\left\{1-\frac{1}{3}P_{n-1}(x)\right\}.$$

PROOF. It is enough to consider $r_1(x)$; the investigation of $r_n(x)$ runs similarly. Let

(10.1) $$v_1(x)=\frac{3+x}{4}(l_1(x))^2-\frac{1-x^2}{4}l_1(x)l'_1(x)+d_1\Pi_n(x)(1+d_2P_{n-1}(x))$$

where the constants d_1 and d_2 shall be chosen suitably later. For $j=2,3,\ldots,n$ we have by *any* choice of d_1 and d_2

$$v_1(x_j)=0$$

since any term vanishes here; it is easy to see that

$$v_1(x_1)=1.$$

For $j=2,3,\ldots,n-1$ we have, owing to (2.7), (1.3) and $l_1(x_j)=0$,

$$v''_1(x_j)=\left(\frac{3+x}{4}(l_1(x))^2-\frac{1-x^2}{4}l_1(x)l'_1(x)\right)''_{x=x_j}=$$

(10.2) $$=\frac{3+x_j}{4}2(l_1(x)l'_1(x))'_{x=x_j}-\frac{1-x_j^2}{4}(l_1(x)l'_1(x))''_{x=x_j}+x_j(l_1(x)l'_1(x))'_{x=x_j}=$$
$$=(l'_1(x_j))^2\frac{3}{2}(1+x_j)+\frac{-1+x_j^2}{4}3l'_1(x_j)l''_1(x_j)=$$
$$=\frac{3}{4}(1+x_j)l'_1(x_j)\{2l'_1(x_j)+(x_j-1)l''_1(x_j)\}.$$

Writing (9. 1) for $\nu=1$ in the form

$$\Pi'_n(1)(x-1)l_1(x)=\Pi_n(x),$$

the equation (2. 6) gives

(10. 3) $$(1-x^2)\{(x-1)l_1(x)\}''+n(n-1)(x-1)l_1(x)=0,$$

i. e. for $x\to x_j$

$$(x_j-1)l_1''(x_j)+2l_1'(x_j)=0;$$

hence from (10. 2)

(10. 4) $$v_1''(x_j)=0 \qquad (j=2,3,\ldots,n-1)$$

by any choice of d_1, d_2. Further we have from the requirement

$$v_1''(-1)=0,$$

owing to $l_1(-1)=0$, the parity of n, (1. 3), (2. 9) and (2. 13),

$$0=v_1''(-1)=\frac{1}{2}(l_1(x)^2)''_{x=-1}-(l_1'(-1))^2+d_1\{2d_2\Pi_n'(-1)P_{n-1}'(-1)+$$
$$+(1-d_2)\Pi_n''(-1)\}=d_1\left\{d_2n^2(n-1)^2-(1-d_2)\frac{n^2(n-1)^2}{2}\right\}$$

which is fulfilled if

$$d_2=\frac{1}{3}.$$

To determine d_1 we shall use the requirement $v_1''(1)=0$. Taking into account $l_1(1)=1$, $\Pi_n(1)=0$, (2. 8), (1. 3) and (2. 13),

(10. 5) $$0=v_1''(1)=\frac{3}{2}l_1'(1)+3(l_1(x)l_1'(x))'_{x=1}+d_1\left\{\frac{2}{3}\Pi_n'(1)P_{n-1}'(1)+\right.$$
$$\left.+\Pi_n''(1)\frac{4}{3}\right\}=3l_1''(1)+3(l_1'(1))^2+\frac{3}{2}l_1'(1)-d_1n^2(n-1)^2.$$

For the determination of $l_1'(1)$ and $l_1''(1)$ we write (10. 3) in the form

(10. 6) $$(1-x^2)l_1''(x)-2(1+x)l_1'(x)+n(n-1)l_1(x)=0,$$

i. e. for $x\to 1$ we get

(10. 7) $$l_1'(1)=\frac{n(n-1)}{4}.$$

In order to obtain $l_1''(1)$ we write (10. 6) in the form

$$l_1''(x)=\frac{-2(1+x)l_1'(x)+n(n-1)l_1(x)}{-1+x^2},$$

i. e. for $x\to 1$

$$l_1''(1)=\frac{\{n(n-1)-2\}l_1'(1)-4l_1''(1)}{2}$$

and

$$l_1''(1) = \frac{n(n-1)-2}{24}\, n(n-1).$$

Putting this and (10. 7) into (10. 5) we get

$$d_1 = \frac{5}{16} + \frac{1}{8n(n-1)}\,.$$

Owing to the uniqueness theorem we have

$$r_1(x) \equiv v_1(x).$$

Q. e. d.

11. The formulae for the $r_\nu(x)$'s become simpler if we consider the polynomials

(11. 1) $$r_\nu^*(x) = r_\nu(x) + r_{n-\nu+1}(x) \qquad \left(\nu = 2, 3, \ldots, \frac{n}{2}\right).$$

Since we have

$$x_{n-\nu+1} = -x_\nu, \quad P_{n-1}(x_{n-\nu+1}) = -P_{n-1}(x_\nu),$$

(9. 5) gives at once

(11. 2) $$r_\nu^*(x) = (l_\nu(x))^2 + (l_{n-\nu+1}(x))^2 + \frac{\Pi_n(x)}{2n(n-1)P_{n-1}(x_\nu)} \left\{ \int_1^x \frac{l_\nu'(t)}{t-x_\nu}\, dt + \right.$$
$$\left. + \int_{-1}^x \frac{l_\nu'(t)}{t-x_\nu}\, dt - \int_1^x \frac{l_{n-\nu+1}'(t)}{t+x_\nu}\, dt - \int_{-1}^x \frac{l_{n-\nu+1}'(t)}{t+x_\nu}\, dt \right\}.$$

Since owing to the parity of n

$$\Pi_n(-x) = \Pi_n(x), \quad \Pi_n'(x_{n-\nu+1}) = -\Pi_n'(x_\nu),$$

i. e.

$$l_{n-\nu+1}(t) = \frac{\Pi_n(t)}{\Pi_n'(x_{n-\nu+1})(t - x_{n-\nu+1})} = \frac{\Pi_n(-t)}{\Pi_n'(x_\nu)(-t-x_\nu)} = l_\nu(-t),$$

we have

$$-\int_1^x \frac{l_{n-\nu+1}'(t)}{t+x_\nu}\, dt = \int_1^x \frac{l_\nu'(-t)}{t+x_\nu}\, dt = \int_{-1}^{-x} \frac{l_\nu'(t)}{t-x_\nu}\, dt,$$

$$-\int_{-1}^x \frac{l_{n-\nu+1}'(t)}{t+x_\nu}\, dt = \int_{-1}^x \frac{l_\nu'(-t)}{t+x_\nu}\, dt = \int_{+1}^{-x} \frac{l_\nu'(t)}{t-x_\nu}\, dt,$$

i. e.

$$r_\nu^*(x) = (l_\nu(x))^2 + (l_{n-\nu+1}(x))^2 +$$

(11.3)
$$+ \frac{\Pi_n(x)}{2n(n-1)P_{n-1}(x_\nu)} \left\{ \int_1^x + \int_{-1}^x + \int_{-1}^{-x} + \int_1^{-x} \frac{l'_\nu(t)}{t-x_\nu}\,dt \right\}.$$

(Received 30 January 1957)

EIN ELEMENTARGEOMETRISCHER BEWEIS VON H. A. SCHWARZ VEREINFACHT UND UNABHÄNGIG VOM PARALLELENAXIOM GEFÜHRT

Von

PAUL SZÁSZ (Budapest)

(*Vorgelegt von* G. HAJÓS)

Herrn Professor LEOPOLD FEJÉR *zugeeignet*

Unter allen einem spitzwinkligen geradlinigen Dreieck ABC eingeschriebenen geradlinigen Dreiecken hat das Dreieck der Höhenfußpunkte den kleinsten Umfang.

Für diesen Satz von G. F. FAGNANO, der ihn mittels Differentialrechnung gefunden hat,[1] sind zwei, wesentlich verschiedene elementargeometrische Beweise bekannt geworden. Der eine ist der Beweis von H. A. SCHWARZ,[2] der andere rührt von L. FEJÉR[3] her. Ein besonderer Vorzug des Fejérschen Beweises ist, daß er auch in der hyperbolischen Geometrie gültig bleibt, in der der Schwarzsche versagt.[4] Die Bedeutung des Schwarzschen Beweises besteht andererseits darin, daß er einer Verallgemeinerung für gewisse konvexe Polygone fähig ist.

Ich erlaube mir in dieser Note einen dritten elementargeometrischen Beweis des oben stehenden Satzes vorzulegen. Er ist eine Vereinfachung des

[1] Vgl. M. ZACHARIAS, Elementargeometrie und elementare nichteuklidische Geometrie in synthetischer Behandlung, *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, III AB 9, S. 983.

[2] H. A. SCHWARZ, Beweis des Satzes, daß unter allen einem spitzwinkligen Dreiecke eingeschriebenen Dreiecken das Dreieck der Höhenfußpunkte den kleinsten Umfang hat, *Gesammelte mathematische Abhandlungen. II* (Berlin, 1890), S. 344—345.

[3] Siehe H. RADEMACHER und O. TOEPLITZ, *Von Zahlen und Figuren* (Berlin, 1933), 2. Aufl., S. 23—26 und 168.

[4] Der Beweis von L. FEJÉR gilt sogar auch für sphärische Dreiecke. Ich bemerke aber, daß für die hyperbolische Ebene auch der Beweis von H. A. SCHWARZ leicht gerettet werden kann, nämlich auf Grund des folgenden Satzes der hyperbolischen Elementargeometrie:

Liegen die Strecken $\overline{AP}=\overline{BQ}$ auf ein und derselben Seite von der Geraden AB und ist $\sphericalangle BAP$ das Supplement von $\sphericalangle ABQ$, so ist $\overline{AB}<\overline{PQ}$.

Schwarzschen Beweises, insofern ich nur von den zwei ersten Spiegelungen von H. A. SCHWARZ Gebrauch mache, und er behält seine Gültigkeit auch in der hyperbolischen Geometrie, da doch bei dieser Beweisführung nur solche elementargeometrische Sätze zur Verwendung kommen, die vom Parallelenaxiom unabhängig sind.

Diese Beweisart ist im Grunde genommen nicht neu, sie war nach dem Vorgange von J. PETERSEN[5] schon von A. ADLER[6] in seinem Buche angedeutet worden. Neu ist aber, soviel ich weiß, daß hier der Beweis *unabhängig vom Parallelenaxiom* geführt wird.

Anschließend beweise ich noch den verwandten Satz von R. STURM[7] über recht- oder stumpfwinklige Dreiecke, ebenfalls unabhängig vom Parallelenaxiom.

*

Den Grund des angekündigten Beweises bildet der folgende einfache

HILFSSATZ. *Liegen die Strecken $\overline{AP}=\overline{BQ}$ auf verschiedenen Seiten von der Geraden AB und ist $\sphericalangle BAP$ das Supplement von $\sphericalangle ABQ$, so ist $\overline{AB}<\overline{PQ}$.*

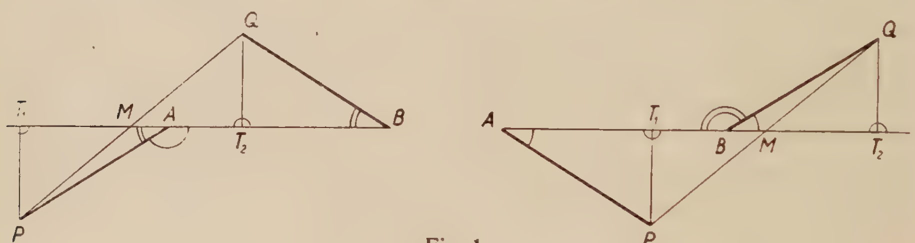

Fig. 1

Um das einzusehen, seien auf AB von P bzw. Q aus die Lote $\overline{PT_1}$ bzw. $\overline{QT_2}$ gefällt. Ist $\sphericalangle BAP$ eventuell ein rechter Winkel, so ist auf Grund der Voraussetzung auch $\sphericalangle ABQ$ ein rechter, also fällt dann T_1 mit A und T_2 mit B zusammen. Im Gegenfall ist immer noch $\overline{AB}=\overline{T_1T_2}$. Das sieht man so ein. Infolge der Voraussetzung ist $\sphericalangle T_1AP=\sphericalangle T_2BQ$ (Fig. 1), also sind wegen $\overline{AP}=\overline{BQ}$ die rechtwinkligen Dreiecke PAT_1 und QBT_2 kongruent und deshalb ist $\overline{AT_1}=\overline{BT_2}$. Da weiter diese Strecken auch gleichsinnig sind, so ist $\overline{AB}=\overline{T_1T_2}$, wie behauptet wurde. Weil aber P und Q auf verschiedenen

[5] J. PETERSEN, *Methoden und Theorien zur Auflösung geometrischer Constructionsaufgaben* (Kopenhagen, 1879), S. 66—67, Aufgabe 340.

[6] A. ADLER, *Theorie der geometrischen Konstruktionen* (Leipzig, 1906), S. 33—34, Aufgaben 62, 63.

[7] R. STURM, Bemerkungen und Zusätze zu Steiners Aufsätzen über Maximum und Minimum, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **96** (1884), S. 36—77, insbesondere S. 64—65.

Seiten von der Geraden AB liegen, so wird AB von der Geraden PQ in einem Punkte M zwischen T_1 und T_2 geschnitten (der wegen $\overline{T_1P} = \overline{T_2Q}$ der Mittelpunkt von $\overline{T_1T_2}$ ist) und es ist bekanntlich

$$\overline{T_1M} < \overline{PM}, \quad \overline{MT_2} < \overline{MQ},$$

also

$$\overline{T_1T_2} = \overline{T_1M} + \overline{MT_2} < \overline{PM} + \overline{MQ} = \overline{PQ}.$$

Mit Rücksicht auf $\overline{AB} = \overline{T_1T_2}$ besteht daher in der Tat $\overline{AB} < \overline{PQ}$.

Auf Grund dieses Hilfssatzes können wir nun den Satz von G. F. FAGNANO auf dem Wege von H. A. SCHWARZ statt sechs Spiegelungen schon durch die zwei ersten und unabhängig vom Parallelenaxiom beweisen, wie folgt.

Man klappe das Dreieck ABC um die Seite $\overline{BC}$ um, so daß es zu A_1BC wird, sodann noch A_1BC um $\overline{CA_1}$, so daß A_1B_1C ensteht. Das Dreieck $\alpha\beta\gamma$ der Höhenfußpunkte gelangt bei diesem Umklappen der Reihe nach in die Lagen $\alpha\beta_1\gamma_1$, $\alpha_1\beta_1\gamma_2$, und zwar liegen die Punkte $\gamma, \alpha, \beta_1, \gamma_2$ infolge der Winkelgleichheiten

$$\sphericalangle B\alpha\gamma = \sphericalangle C\alpha\beta,$$
$$\sphericalangle C\beta\alpha = \sphericalangle A\beta\gamma^{8}$$

in einer Geraden (Fig. 2), so daß die Strecke $\overline{\gamma\gamma_2}$ gleich dem Umfange des Dreiecks $\alpha\beta\gamma$ ist. Wenn nun abc irgend ein anderes, dem Dreieck ABC eingeschriebenes Dreieck ist, welches bei diesen Umklappungen der Reihe nach die Lagen $ab_1c_1, a_1b_1c_2$ annimmt, so ist die Länge des Linienzuges cab_1c_2 dem Umfange des Dreiecks abc gleich. Da aber (falls c von γ verschieden ist) die Strecken $\overline{\gamma c} = \overline{\gamma_2 c_2}$ offenbar auf verschiedenen Seiten von der Geraden $\gamma\gamma_2$ liegen und infolge

$$\sphericalangle \alpha\gamma B = \sphericalangle \beta\gamma A = \sphericalangle \beta_1\gamma_1 A_1$$

der $\sphericalangle \gamma_2\gamma A$ das Supplement von $\sphericalangle \gamma\gamma_2 A_1$ und ebenso $\sphericalangle \gamma_2\gamma B$ das Supplement von $\sphericalangle \gamma\gamma_2 B_1$ ist, also jedenfalls $\sphericalangle \gamma_2\gamma c$ gleich dem Supplement von $\sphericalangle \gamma\gamma_2 c_2$ ausfällt, besteht $\overline{\gamma\gamma_2} < \overline{cc_2}$ im Sinn des obigen Hilfssatzes. Fällt c mit γ

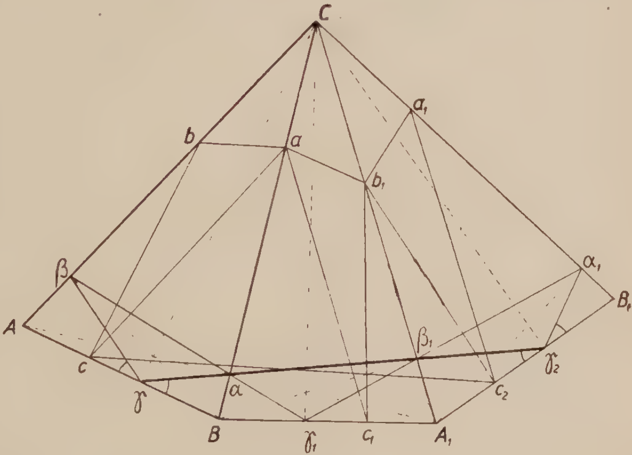

Fig. 2

[8] Siehe den Nachtrag.

zusammen, so sind auch c_2 und γ_2 identisch und es ist $\overline{\gamma\gamma_2} = \overline{cc_2}$. Wegen

$$\overline{cc_2} \leqq \overline{ca} + \overline{ab_1} + \overline{b_1c_2}$$

(wobei im letzteren Fall gewiß die Ungleichheit besteht, da doch das Dreieck abc von $\alpha\beta\gamma$ verschieden ist) gilt deshalb umsomehr

$$\overline{\gamma\gamma_2} < \overline{ca} + \overline{ab_1} + \overline{b_1c_2}.$$

Also ist der Umfang des Dreiecks $\alpha\beta\gamma$ kleiner als der von abc, w. z. b. w.

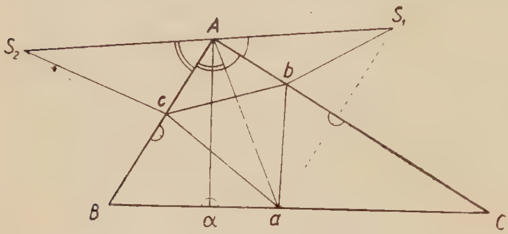

Fig. 3

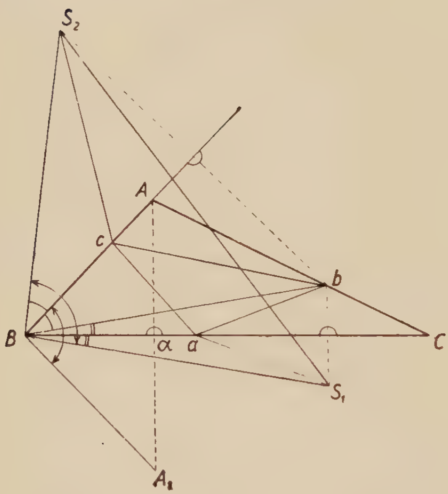

Fig. 4

Der Satz von R. STURM,[9] laut welches *bei jedem einem rechtwinkligen Dreiecke eingeschriebenen Dreieck der Umfang größer als die doppelte Hypotenusen-Höhe ist* (woraus der entsprechende Satz für ein stumpfwinkliges Dreieck schon folgt),[10] läßt sich unabhängig vom Parallelenaxiom ähnlich beweisen. Es ist aber noch einfacher, zu diesem Ende die Methode von L. FEJÉR[11] anzuwenden: ist das Dreieck bei A rechtwinklig (Fig. 3) und sind S_1 bzw. S_2 die Spiegelbilder von a an der Geraden AC bzw. AB, so liegen die Punkte S_1, A, S_2 offenbar in einer Geraden, es ist also mit Rücksicht auf $\overline{AS_1} = \overline{Aa} = \overline{AS_2}$

$$\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca} = \overline{S_1b} + \overline{bc} + \overline{cS_2} > \overline{S_1S_2} = 2\overline{Aa}$$

und umsomehr

$$\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca} > 2\overline{A\alpha},$$

womit die Behauptung erwiesen ist.

Übrigens läßt sich die Methode von L. FEJÉR auch dann anwenden, wenn man nur weiß, daß das Dreieck recht- oder stumpfwinklig ist. Man muß nur mit einem solchen Eckpunkt des eingeschriebenen Dreiecks anfangen, der einem spitzen Winkel des ursprünglichen gegenüber liegt. Ist also $\sphericalangle A$ ein rechter oder stumpfer Winkel, so seien jetzt S_1 bzw. S_2 die Spiegelbilder

[9] R. STURM, a. a. O. [7], S. 64.

[10] R. STURM, a. a. O. [7].

[11] Siehe [3].

von b an der Geraden BC bzw. AB, und es sei A_1 das Spiegelbild von A an der Geraden BC (Fig. 4). So ist

$$\overline{ab}+\overline{bc}+\overline{ca}=\overline{S_1a}+\overline{ac}+\overline{cS_2}\geqq\overline{S_1S_2}.$$

Da aber offenbar

$$\sphericalangle S_1BS_2=2\sphericalangle CBA=\sphericalangle A_1BA$$

ist und

$$BS_1=\overline{BS_2}=\overline{Bb}>\overline{BA}$$

ausfällt (da doch $\sphericalangle A$ recht oder stumpf ist), so ist bekanntlich $\overline{S_1S_2}>\overline{AA_1}=$ $=2\overline{A\alpha}$. Es besteht deshalb umsomehr

$$\overline{ab}+\overline{bc}+\overline{ca}>2\overline{A\alpha}.$$

Damit ist *unabhängig vom Parallelenaxiom* der Satz von R. STURM[12] bewiesen: *bei jedem einem recht- oder stumpfwinkligen Dreieck eingeschriebenen Dreiecke ist der Umfang größer als die doppelte Höhe auf der größten Seite.*

Der obige Beweis für den Satz von FAGNANO läßt sich in trivialer Weise für konvexe Polygone von *ungerader* Seitenzahl (die einer gewissen Bedingung Genüge leisten) verallgemeinern, und es ergibt sich *unabhängig vom Parallelenaxiom* folgender

SATZ. *Ist das konvexe Polygon $P_1P_2\ldots P_{2n+1}$ von ungerader Seitenzahl von solcher Beschaffenheit, daß für gewisse Zwischenpunkte $A_1, A_2, \ldots, A_{2n+1}$ der Seiten $\overline{P_1P_2}, \overline{P_2P_3}, \ldots, \overline{P_{2n+1}P_1}$ die Winkelgleichheiten*

$$\sphericalangle P_1A_1A_{2n+1}=\sphericalangle P_2A_1A_2,\quad \sphericalangle P_2A_2A_1=\sphericalangle P_3A_2A_3,\ \ldots,$$
$$\sphericalangle P_{2n+1}A_{2n+1}A_{2n}=\sphericalangle P_1A_{2n+1}A_1$$

bestehen, so hat $A_1A_2\ldots A_{2n+1}$ einen kleineren Umfang, als irgendein anderes, dem gegebenen eingeschriebenes Polygon $B_1B_2\ldots B_{2n+1}$.

Im Gegensatz zur euklidischen Ebene,[13] gilt dieser Satz in der hyperbolischen Ebene auch für Polygone von *gerader* Seitenzahl. Das leuchtet ein, wenn man bedenkt, daß der oben bewiesene Hilfssatz in der hyperbolischen Ebene auch dann gültig bleibt, wenn die Strecken $\overline{AP}=\overline{BQ}$ auf ein und derselben Seite von der Geraden AB liegen.[14]

Nachtrag

Der oben benutzte bekannte Satz, laut welches *die Höhen eines spitzwinkligen Dreiecks die inneren Winkelhalbierenden des Dreiecks der Höhenfuß-*

12 R. STURM, a. a. O. [7].
13 Vgl. R. STURM, a. a. O. [7], § 27, S. 63—64.
14 Vgl. S. 217, Fußnote [4].

punkte sind, läßt sich *unabhängig vom Parallelenaxiom* etwa so beweisen:[15]

Es seien t bzw. u die Spiegelbilder von $\beta\gamma$ an der Geraden γC bzw. βB (Fig. 5 mit der obigen Bezeichnung). Sind T_1, T_2, T_3 der Reihe nach die Projektionen von B auf $\beta\gamma$, t, u, so ist einerseits $\overline{BT_1} = \overline{BT_2}$ und andererseits $\overline{BT_1} = \overline{BT_3}$, da AB eine Winkelhalbierende von $\sphericalangle(\beta\gamma, t)$ und βB eine Winkelhalbierende von $\sphericalangle(\beta\gamma, u)$ ist. Der Punkt B hat also von t und u dieselbe Entfernung: $\overline{BT_2} = \overline{BT_3}$. Und da wegen der Spitzwinkligkeit des Dreiecks ABC die Punkte B, β, wie sofort ersichtlich, auf verschiedenen Seiten von der Geraden t liegen, so liegen infolge $\overline{BT_2} = \overline{BT_3}$ auch T_3 und β auf verschiedenen Seiten von t, also wird t durch u in einem Punkte X geschnitten. Ähnlich den vorher Gesagten hat neben B auch C von t und u dieselbe Entfernung, also sind die Geraden XB, XC gewiß Winkelhalbierenden von $\sphericalangle(t, u)$. Weil aber B und C offenbar auf verschiedenen Seiten von der Geraden t, sowie von u liegen, so sind XB und XC dieselbe Winkelhalbierende von $\sphericalangle(t, u)$. Also ist die Gerade BC eine Winkelhalbierende von $\sphericalangle(t, u)$. Der Punkt A hat aus den obigen ähnlichen Gründen ebenfalls dieselbe Entfernung von t und u, folglich ist die Gerade XA ebenfalls eine Winkelhalbierende von $\sphericalangle(t, u)$. Da aber die Punkte A, B, C nicht in einer Geraden liegen, so sind diese Winkelhalbierenden von $\sphericalangle(t, u)$, nämlich BC und XA, verschieden und stehen somit aufeinander senkrecht. Also ist $\overline{AX}$ eine Höhe des Dreiecks ABC, d. h. X fällt mit α zusammen. Das bedeutet aber, daß $\sphericalangle\beta\alpha\gamma$ durch die Gerade $A\alpha$ halbiert wird, womit der Satz bewiesen ist.

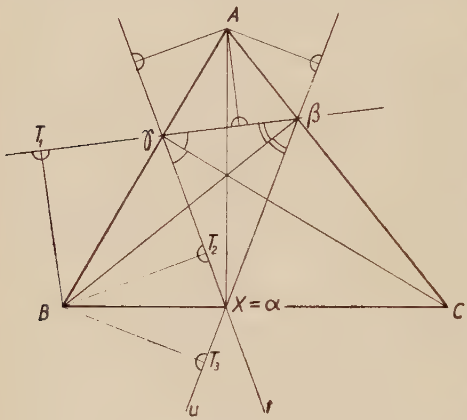

Fig. 5

(Eingegangen am 12. Februar 1957.)

[15] Bezüglich des Grundgedankens dieses Beweises vgl. R. Baltzer, *Die Elemente der Mathematik,* Bd. II (Leipzig, 1883), 6. Aufl., S. 41, wobei der Beweis von Chr. Gudermann wiedergegeben ist. Für einen anderen, weniger einfachen Beweis siehe B. Kerékjártó, *Sur les fondements de la géométrie. I* (Budapest, 1955), S. 163—164; ungarisch schon früher erschienen (Szeged, 1937, S. 140—142). Ein dritter Beweis ergibt sich durch die Methode von L. Fejér, siehe H. Rademacher und O. Toeplitz, a. a. O. [3], S. 26.

ON THE NUMBER OF ZEROS OF SUCCESSIVE DERIVATIVES OF ENTIRE FUNCTIONS OF FINITE ORDER

By

P. ERDŐS (Budapest), corresponding member of the Academy,

and

A. RÉNYI (Budapest), member of the Academy

In our joint paper [1][1] published recently, we have proved among other results the following

THEOREM 2'. *If $f(z)$ is an arbitrary entire function, $M(r)=\operatorname{Max}_{|z|=r}|f(z)|$, and $x=H(y)$ denotes the inverse function of $y=\log M(r)$, then we have*

$$\liminf_{k\to\infty}\frac{N_k(f(z),1)\,H(k)}{k}\leqq e^2. \tag{1}$$

Here $N_k(f(z),1)$ denotes the number of zeros of $f^{(k)}(z)$ in the unit circle.

The aim of the present note is to prove an improvement of this theorem for entire functions of finite order $\geqq 1$, contained in the following

THEOREM A. *If $f(z)$ is an arbitrary entire function of finite order $\alpha\geqq 1$, $M(r)=\operatorname{Max}_{|z|=r}|f(z)|$, and $x=H(y)$ denotes the inverse function of $y=\log M(x)$, further if $N_k(f(z),1)$ denotes the number of zeros of $f^{(k)}(z)$ in the unit circle, then we have*

$$\liminf_{k\to\infty}\frac{N_k(f(z),1)\,H(k)}{k}\leqq e^{2-\frac{1}{\alpha}}. \tag{2}$$

[1] We use this occasion to point out that the condition

$$\liminf_{r\to\infty}\frac{\log M(r)}{g(r)}<1$$

in Theorem 2 of [1] can be replaced by the somewhat weaker condition: there exists a sequence $r_n\to+\infty$ such that $\log M(r_n)\leqq g(r_n)$. It is clear from the proof that only this is actually used. Thus the following assertion is true:

THEOREM B. *Let $g(r)$ denote an arbitrary increasing function, defined in $0<r<+\infty$, tending to $+\infty$ for $r\to+\infty$. Let $x=h(y)$ denote the inverse function of $y=g(x)$. Let us suppose that $f(z)$ is an entire function for which, putting $M(r)=\operatorname{Max}_{|z|=r}|f(z)|$, we have*

$$\log M(r_n)\leqq g(r_n) \qquad (n=1,2,\ldots)$$

where r_n is some sequence of positive numbers, tending to $+\infty$ for $n\to\infty$. Then we have

$$\liminf_{k\to\infty}\frac{N_k(f(z),1)\,h(k)}{k}\leqq e^2.$$

PROOF. It has been shown in [1] (formula (30), p. 132) that if $\nu(r)$ denotes the central index of the power series of $f(z)$ for $|z|=r$, then

$$N_{\nu(r)}(f(z),1) \leqq (\nu(r)+1)\log\frac{1}{1-\frac{e}{r}}. \tag{3}$$

It follows from (3) that

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{N_{\nu(r)}(f(z),1)\,r}{\nu(r)} \leqq e. \tag{4}$$

Now we may suppose without loss of generality that $f(0)=1$. In that case if $\mu(r)$ denotes the absolute value of the maximal term of the power series of $f(z)$ on the circle $|z|=r$, the following well-known formula is valid (see [2], Vol. II, p. 5, Problem IV. 33):

$$\log\mu(r)=\int_0^r\frac{\nu(t)}{t}\,dt. \tag{5}$$

It follows from (5) that if $c>1$, taking into account that $\nu(t)$ is non-decreasing (see [2], Vol. I, p. 21, Problem I. 120), we have

$$\log\mu(rc)-\log\mu(r)=\int_r^{rc}\frac{\nu(t)}{t}\,dt \geqq \nu(r)\log c. \tag{6}$$

On the other hand, it is known (see [2], Vol. II, p. 9, Problem IV. 60) that

$$\liminf_{r\to\infty}\frac{\nu(r)}{\log\mu(r)} \leqq \alpha. \tag{7}$$

Thus to any $\varepsilon>0$ there can be found a sequence r_n $(n=1,2,\ldots)$ for which $r_n\to\infty$ and $\nu(r_n)\leqq(\alpha+\varepsilon)\log\mu(r_n)$. Applying (6) for $r=r_n$ we obtain

$$\nu(r_n)\left(\log c+\frac{1}{\alpha+\varepsilon}\right)\leqq\log\mu(r_nc). \tag{8}$$

Choosing $c=e^{1-\frac{1}{\alpha+\varepsilon}}$, it follows that

$$\nu(r_n)\leqq\log\mu\left(r_ne^{1-\frac{1}{\alpha+\varepsilon}}\right). \tag{9}$$

As $\mu(r)\leqq M(r)$, (9) implies

$$\nu(r_n)\leqq\log M\left(r_ne^{1-\frac{1}{\alpha+\varepsilon}}\right) \tag{10}$$

and thus

$$H(\nu(r_n))\leqq r_ne^{1-\frac{1}{\alpha+\varepsilon}}. \tag{11}$$

As by (4)

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{N_{\nu(r_n)}(f(z), 1)\, r_n}{\nu(r_n)} \leqq e \tag{12}$$

and with respect to (11), we obtain

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{N_{\nu(r_n)}(f(z), 1)\, H(\nu(r_n))}{\nu(r_n)} \leqq e^{2-\frac{1}{\alpha+\varepsilon}}. \tag{13}$$

But (13) clearly implies

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{N_k(f(z), 1)\, H(k)}{k} \leqq e^{2-\frac{1}{\alpha+\varepsilon}}. \tag{14}$$

As (14) is valid for any $\varepsilon > 0$, the assertion of Theorem A is proved. Especially[2] we have for entire functions of exponential type, with type A,

$$\liminf_{k\to\infty} N_k(f(z), 1) \leqq Ae. \tag{15}$$

(Received 13 February 1957)

References

[1] P. Erdős and A. Rényi, On the number of zeros of successive derivatives of analytic functions, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **7** (1956), pp. 125—144.

[2] G. Pólya und G. Szegő, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis* (Berlin, 1925).

[3] S. S. Macintyre, On the zeros of successive derivatives of integral functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **67** (1949), pp. 241—251.

[4] N. Levinson, The Gontcharoff polynomials, *Duke Math. J.*, **11** (1944), pp. 729—733; and **12** (1944), p. 335.

[5] S. S. Macintyre, On the bound for the Whittaker constant, *Journ. London Math. Soc.*, **22** (1947), pp. 305—311.

[2] Let W (Whittaker's constant) denote the greatest number such that if $f(z)$ is of exponential type $A < W$, then an infinity of derivatives of $f(z)$ have no zeros in the unit circle. The exact value of W is not known. It follows from (15) that $\frac{1}{e} \leqq W$. This estimate is, however, much weaker than the estimate $0{,}7259 \leqq W$, proved by Sheila Scott Macintyre [3]. (In footnote 4 of [1] we mentioned only the weaker estimate $0{,}7199 \leqq W$, due to N. Levinson [4].) It has been shown also by S. S. Macintyre [5], that $W \leqq 0{,}7378$. (It has been conjectured (see [4]) that $W = \frac{2}{e}$.)

ON PERIODIC ENTIRE FUNCTIONS

By

CATHERINE RÉNYI (Budapest)

(*Presented by* P. TURÁN)

Introduction

Let $f(z)$ denote a transcendental entire function. Let $Z_a(n)$ and $Z_b(n)$ denote the number of those among the first $n+1$ coefficients of the power series expansion of $f(z)$ around the point a and b, respectively, which are equal to 0. Suppose $a \neq b$ and put

$$\Delta(n) = Z_a(n) + Z_b(n) - n. \tag{1}$$

Recently I have proved (see [1], Theorem 1) that

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{\Delta(n)}{n} \leqq 0. \tag{2}$$

This result contains the proof of the following conjecture of G. PÓLYA: *The power series expansion of a transcendental entire function can not have Fabry gaps around two different points*, i. e. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{Z_a(n)}{n} = 1$ and $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{Z_b(n)}{n} = 1$ can not both hold if $a \neq b$.

In § 1 of the present paper the results of [1] are developed further, in that the dependence of the (lower) order of magnitude of $\Delta(n)$ on the rate of growth of $f(z)$ is investigated. In § 2 the results of § 1 are applied to the investigation of the power series expansion and in § 3 of the Hermite expansion of periodic functions, respectively. Finally, in § 4 a problem, which has been formulated already in [1], is solved: it is shown that there exist transcendental entire functions for which $\lim\limits_{n\to\infty} \Delta(n) = +\infty$.

§ 1. On the dependence of the behaviour of $\Delta(n)$ on the rate of growth of $f(z)$

We begin by proving the following

THEOREM 1. *Let $f(z)$ denote an entire function of finite order $\varrho \geqq 1$. Let a and b be two arbitrary different points of the complex plane and denote*

by $Z_a(n)$ and $Z_b(n)$ the number of those among the first $n+1$ coefficients of the power series expansion of $f(z)$ around a and b, respectively, which are equal to 0. Let us put $\Delta(n) = Z_a(n)+Z_b(n)-n$, then we have for any $\varepsilon>0$

$$\lim_{\overline{n\to\infty}} \frac{\Delta(n)}{n^{1-\frac{1}{\varrho+\varepsilon}}} \leqq 0. \tag{1.1}$$

If $f(z)$ is of finite type $\tau \geqq 0$, then (1.1) can be replaced by

$$\lim_{\overline{n\to\infty}} \frac{\Delta(n)}{n^{1-\frac{1}{\varrho}}} \leqq \frac{|b-a|}{2} e^2 \left(\frac{\tau}{e}\right)^{\frac{1}{\varrho}}. \tag{1.2}$$

Especially if $f(z)$ is of exponential type τ, then we have

$$\lim_{\overline{n\to\infty}} \Delta(n) \leqq e\tau \frac{|b-a|}{2}. \tag{1.3}$$

PROOF. Without loss of generality we may suppose $a=-1$ and $b=1$. We may also suppose that $f(z)$ is real on the real axis. As a matter of fact, if $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+ib_n)z^n$ where a_n and b_n are real ($n=0, 1, \ldots$), it suffices to prove the validity of Theorem 1 for $f_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ or $f_2(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$. This can be seen as follows: the order of $f(z)$ is equal to $\max(\varrho_1, \varrho_2)$ and if $\varrho_1=\varrho_2$, then the type of $f(z)$ is equal to $\max(\tau_1, \tau_2)$, where ϱ_i and τ_i denotes the order and type of $f_i(z)$ ($i=1,2$), respectively (this is a consequence of Theorem 2.2.2, p. 9 and Theorem 2.2.10, p. 11 of [2]); further if $\Delta_1(n)$ and $\Delta_2(n)$ are defined in the same way as $\Delta(n)$ only $f(z)$ is replaced by $f_1(z)$ and $f_2(z)$, respectively, then $\Delta(n) \leqq \min[\Delta_1(n), \Delta_2(n)]$.

To prove Theorem 1 we use the following theorem due to P. ERDŐS and A. RÉNYI ([3], Theorem A):

If $f(z)$ is an entire function of finite order $\varrho \geqq 1$, $M(r)=\operatorname{Max}_{|z|=r}|f(z)|$ ($r>0$), and $x=H(y)$ denotes the inverse function of $y=\log M(x)$, then denoting by N_n the number of zeros of $f^{(n)}(z)$ in the closed unit circle, we have

$$\lim_{\overline{n\to\infty}} \frac{N_n H(n)}{n} \leqq e^{2-\frac{1}{\varrho}}. \tag{1.4}$$

To deduce Theorem 1 from (1.4) we use the same elementary inequality which has been used already in [1] and which asserts that

$$\Delta(n) \leqq N_n \tag{1.5}$$

where N_n has the same meaning as in (1.4). Taking into account that for an entire function of order ϱ we have

$$y^{\frac{1}{\varrho+\frac{\varepsilon}{2}}} < H(y), \tag{1.6}$$

further for an entire function of order ϱ and finite type $\tau \geqq 0$ we have

$$\left(\frac{y}{\tau+\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\varrho}} < H(y) \tag{1.7}$$

for any $\varepsilon > 0$ and for sufficiently large values of $y > 0$, where $H(y)$ has the meaning as above, (1.1) and (1.2) follow from (1.4) and (1.5). As (1.3) is a special case of (1.2), Theorem 1 is proved.

It should be mentioned that (1.3) is not far from being best possible. As a matter of fact, if $f(z) = (\sin z)^k$ where k is a positive integer, then clearly for $a = 0$ and $b = \pi$

$$\Delta(n) = k+1 \tag{1.8}$$

if $n-k$ is odd, while in this case (1.3) gives

$$\Delta(n) \leqq k\frac{e\pi}{2} \tag{1.9}$$

for infinitely many n.

The following problem remains, however, open: what is the least value of A such that for any entire function of exponential type $\tau > 0$ we have

$$\varliminf_{n\to\infty} \Delta(n) \leqq A\tau|b-a|. \tag{1.10}$$

§ 2. Properties of the power series of periodic entire functions

First we deduce from Theorem 1 of [1] the following

THEOREM 2. *Let $f(x)$ denote a periodic entire function. Let $Z_a(n)$ denote the number of those among the first $n+1$ coefficients of the power series of $f(z)$ around an arbitrary point a, which are equal to 0, and put*

$$\lambda(n) = Z_a(n) - \frac{n}{2}. \tag{2.1}$$

Then we have

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{\lambda(n)}{n} \leqq 0. \tag{2.2}$$

By other words: *the lower density of the vanishing coefficients of the power series of a periodic entire function can not exceed $\frac{1}{2}$.*

COROLLARY. *The power series of a periodic entire function can not have Fabry gaps.*

PROOF. To prove Theorem 2 it suffices to remark that if $f(z)$ is periodic with period P, then if $b=a+P$, we have $Z_b(n)=Z_a(n)$ and thus

$$\lambda(n)=\frac{\Delta(n)}{2} \tag{2.3}$$

where $\Delta(n)$ has the meaning as in § 1. Thus Theorem 2 follows. It should be mentioned that the above Corollary follows already from the conjecture of PÓLYA, proved in [1].

For entire periodic functions of finite order we obtain from Theorem 1 of § 1, by the same argument, the following

THEOREM 3. *If $f(z)$ is an entire periodic function of finite order $\varrho\geqq 1$, we have for any $\varepsilon>0$*

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\lambda(n)}{n^{1-\frac{1}{\varrho+\varepsilon}}}\leqq 0. \tag{2.4}$$

If $f(z)$ is also of finite type $\tau\geqq 0$ and its period is denoted by P, we have

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\lambda(n)}{n^{1-\frac{1}{\varrho}}}\leqq\frac{P}{4}e^2\left(\frac{\tau}{e}\right)^{\frac{1}{\varrho}}. \tag{2.5}$$

Especially if $f(z)$ is of exponential type τ, we have

$$\varlimsup_{n\to\infty}\lambda(n)\leqq\frac{e\tau P}{4}. \tag{2.6}$$

§ 3. On the Hermite expansion of periodic functions

THEOREM 4. *Let $f(x)$ denote a real function, defined on the real axis, which is periodic with period 2π and L-integrable. Let us denote by*

$$H_n(x)=\frac{1}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)\cdot e^{\frac{x^2}{2}} \qquad (n=0,1,\dots) \tag{3.1}$$

the Hermite polynomials and let

$$c_n=\frac{n!}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)H_n(x)e^{-\frac{x^2}{2}}dx \qquad (n=0,1,\dots) \tag{3.2}$$

be the coefficients of the formal Hermite expansion of $f(x)$, that is

$$f(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}c_nH_n(x). \tag{3.3}$$

Let $Z(n)$ denote the number of those among $c_0, c_1, \ldots, c_n$ which are equal to 0. *Then we have*

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{Z(n)}{n} \leq \frac{1}{2}. \tag{3.4}$$

By other words: *the lower density of the vanishing coefficients of the formal Hermite expansion of the function $f(x)$ does not exceed $\frac{1}{2}$.*

PROOF. Let

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{3.5}$$

be the formal Fourier expansion of $f(x)$. According to a well-known formula (see [4] and [5]) we have for $t>0$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) e^{-\frac{k^2t^2}{2}} = \frac{1}{t\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{2t^2}} f(y)dy. \tag{3.6}$$

Let us denote the function obtained from (3.6) for $t=1$ by $F(x)$, i. e. let us put

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{2}} f(y)dy. \tag{3.7}$$

Clearly $F(x)$ is an entire periodic function of x, of order not exceeding 2 and finite type not exceeding $\frac{1}{2}$. From (3.7) with respect to (3.1) we obtain by differentiating n times with respect to x

$$F^{(n)}(0) = (-1)^n c_n \tag{3.8}$$

where c_n is defined by (3.2). Thus the power series of $F(z)$ around $z=0$ is

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n c_n}{n!} z^n. \tag{3.9}$$

Applying to $F(z)$ Theorem 2 of § 2 we obtain (3.4). Actually we obtain from (2.5) somewhat more, namely

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{Z(n) - \frac{n}{2}}{\sqrt{n}} \leq \frac{\pi}{2} e^2 \sqrt{\frac{1}{2e}}. \tag{3.10}$$

§ 4. An entire function for which $\Delta(n) \to +\infty$

THEOREM 5. *There exist periodic entire functions such that*

$$\lambda(n) \to +\infty, \tag{4.1}$$

where $\lambda(n)$ *is defined by* (2.1).

PROOF. We shall try to find $f(z)$ in the form

$$f(z) = \sum_{r=0}^{\infty} B_r (\sin z)^{N_r} \tag{4.2}$$

where

$$N_r = (2r+1)^{r+1} \qquad (r = 0, 1, \ldots). \tag{4.3}$$

We shall determine the coefficients B_r so that we shall have

$$f^{(N_r)}(0) = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots). \tag{4.4}$$

By other words, we determine the B_r successively from the equations

$$B_0 = 1, \qquad B_r = -\frac{1}{N_r!} \sum_{k=0}^{r-1} B_k D_{k,r} \qquad (r = 1, 2, \ldots) \tag{4.5}$$

where

$$D_{k,r} = \left\{ \frac{d^{N_r}}{dz^{N_r}} [(\sin z)^{N_k}] \right\}_{z=0}. \tag{4.6}$$

First we prove that if the coefficients B_r are determined this way, then $f(z)$ defined by (4.2) will really be an entire function, i. e. that the coefficients B_r determined by the system of equations (4.5) satisfy

$$\lim_{r \to \infty} |B_r|^{\frac{1}{N_r}} = 0. \tag{4.7}$$

To prove (4.7) we need an upper estimate for the coefficients $D_{k,r}$ defined by (4.6). Such an estimate can be obtained by the well-known inequality of CAUCHY

$$|G^{(N)}(0)| \leq N! \frac{\max_{|z|=R} |G(z)|}{R^N}. \tag{4.8}$$

Applying (4.8) to the function $G(z) = (\sin z)^{N_k}$ for $N = N_r$ and substituting $R = \dfrac{N_r}{N_k}$ we obtain

$$|D_{k,r}| \leq N_r! \left(\frac{e N_k}{N_r}\right)^{N_r}. \tag{4.9}$$

Thus it follows from (4.5) that

$$|B_r| \leq r e^{N_r} \left(\frac{N_{r-1}}{N_r}\right)^{N_r} \max_{0 \leq k \leq r-1} |B_k| \qquad (r = 1, 2, \ldots). \tag{4.10}$$

Clearly (4. 10) implies $|B_r| \leqq \max_{0 \leqq k \leqq r-1} |B_k|$, and thus by induction we have from (4. 10)

$$|B_r| \leqq r e^{N_r} \left(\frac{N_{r-1}}{N_r}\right)^{N_r}. \tag{4.11}$$

Now (4. 7) follows because by (4. 11)

$$|B_r|^{\frac{1}{N_r}} \leqq r^{\frac{1}{N_r}} e \frac{N_{r-1}}{N_r} \to 0 \quad \text{for} \quad r \to \infty. \tag{4.12}$$

Thus $f(z)$ is really an entire function. As clearly $f(z)$ is periodic with period 2π and odd, taking (4. 4) into account we obtain

$$\lambda(n) \geqq r \quad \text{for} \quad N_r \leqq n < N_{r+1}. \tag{4.13}$$

Thus we have found an entire periodic function for which $\lambda(n)$ and therefore also $\Delta(n)$ (if $a=0$, $b=2\pi$) is tending to $+\infty$ for $n \to \infty$.

(Received 11 February 1957)

References

[1] C. Rényi, On a conjecture of G. Pólya, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **7** (1956), pp. 145—150.

[2] R. P. Boas, *Entire functions* (New York, 1954).

[3] P. Erdős and A. Rényi, On the number of zeros of successive derivatives of entire functions of finite order, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **8** (1957), pp. 223—225.

[4] J. Fourier, *Théorie analytique de la chaleur*, Oeuvres de Fourier (Paris, 1888), Vol. 1, pp. 426—427.

[5] K. Weierstrass, *Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Funktionen reeller Argumente*, Mathematische Werke von K. Weierstraß (Berlin, 1903) Vol. 3, p. 20.

BEITRÄGE ZUR THEORIE DER OPERATORMODULN

Von

A. KERTÉSZ (Debrecen)

(*Vorgelegt von* L. RÉDEI)

§ 1. Einleitung

Es sei R ein beliebiger Ring[1] und G ein mit R als linksseitigem Operatorbereich versehener R-modul. Der Modul G heißt vollständig reduzibel, wenn er eine direkte Summe von einfachen Moduln[2] ist. In zwei früheren Arbeiten ([6] und [7][3]) haben wir die Äquivalenz einiger Bedingungen mit der vollständigen Reduzibilität für den Fall gewisser spezieller Moduln gezeigt, sowie den Zusammenhang zwischen vollständig reduziblen Moduln und den sogenannten halbeinfachen Ringen untersucht. Ein wesentlicher Teil der vorliegenden Arbeit ist auch der Untersuchung der vollständig reduziblen Moduln gewidmet. Die Gültigkeit der in [6] und [7] erzielten Ergebnisse wird hier auf den allgemeinsten Fall ausgedehnt, und zu den früher gefundenen Charakterisierungen der vollständig reduziblen Moduln werden neuere hinzugefügt (§ 6). Im § 5 werden die vollständig reduziblen Moduln durch ein System von Invarianten charakterisiert, und im § 7 werden sämtliche Ringe R bestimmt, für welche jeder R-Modul — von einem trivialen direkten Summanden abgesehen — vollständig reduzibel ist. Diese Ringe sind die halbeinfachen Ringe im klassischen Sinne. Als Anwendung der §§ 6—7 gewinnen wir mehrere rein ringtheoretische Charakterisierungen der halbeinfachen Ringe.

In § 4 verallgemeinern wir für den Fall von Operatormoduln den in der Theorie der Abelschen Gruppen eine wichtige Rolle spielenden Begriff der Servanzuntergruppe, und beweisen einige grundlegende Sätze über diesen Begriff. Im § 3 modifizieren wir den bisher gebräuchlichen Begriff der Ordnung eines Elementes, der sich für die allgemeine Theorie der Moduln als nicht befriedigend erwiesen hat, und wir zeigen, daß man bei einem großen Teil der Untersuchungen bezüglich Operatormoduln sich ohne Einschränkung der Allgemeinheit auf den Fall unitärer Moduln beschränken kann.

[1] Ring bedeutet immer einen assoziativen Ring.

[2] Für die Terminologie und Grundbegriffe verweisen wir auf § 2.

[3] Die Nummern in eckigen Klammern verweisen auf die Literatur am Ende der Arbeit.

§ 2. Terminologie und Bezeichnungen

Es sei R ein Ring. Unter einem R-Modul verstehen wir eine additiv geschriebene Abelsche Gruppe, die R als Ring von Linksoperatoren besitzt. Ein Untermodul bzw. ein Homomorphismus bedeutet in dieser Arbeit immer einen R-Untermodul bzw. einen R-Homomorphismus, d. h. einen bezüglich dieser Operatoren zulässigen Untermodul bzw. Homomorphismus. Moduln und Ringe werden mit großen Buchstaben, ihre Elemente und die ganzen rationalen Zahlen mit kleinen Buchstaben bezeichnet. I sei der Ring der ganzen rationalen Zahlen.

Wir nennen einen R-Modul G *unitär*, falls R ein Einselement besitzt, das auf die Elemente von G identisch operiert. Wir nennen einen Modul *trivial*, falls jeder Operator genau so operiert wie der Nulloperator. Jeder R-Modul G besitzt einen einzigen maximalen trivialen Untermodul, nämlich die Menge sämtlicher Elemente $x \in G$, für welche $Rx = 0$ gilt. Unter einem *einfachen* (in anderer Terminologie: irreduziblen oder minimalen) R-Modul verstehen wir einen Modul mit nur zwei Untermoduln: dem Nullmodul und sich selbst.

Mit R^+ werden wir immer die additive Gruppe des Ringes R als linksseitigen R-Modul bezeichnen. Die Untermoduln von R^+ fallen demnach mit den Linksidealen von R zusammen.

Unter dem durch ein Elementensystem S des R-Moduls G *erzeugten Untermodul* dieses Moduls verstehen wir den engsten, sämtliche Elemente von S enthaltenden Untermodul von G, der durch $\{S\}$ bezeichnet wird. Einen durch ein einziges Element erzeugten Modul nennen wir *zyklisch*. Gehört g zu G, so besteht $\{g\}$ offenbar aus sämtlichen Elementen $rg + ng$ $(r \in R, n \in I)$. Ist G ein unitärer R-Modul, dann wird der zyklische Modul $\{g\}$ bereits durch sämtliche Elemente der Gestalt rg $(r \in R)$ erschöpft.

Wir sagen, daß G die Minimalbedingung für Untermoduln der Eigenschaft φ erfüllt, falls jede streng abnehmende Kette von Untermoduln der Eigenschaft φ von G nach endlich vielen Schritten abbricht. — Unter direkter Summe verstehen wir immer diskrete (in anderer Terminologie: eingeschränkte) direkte Summe, die wir durch $+$ bzw. durch $\sum$ bezeichnen.

Endlich viele, von Null verschiedene Elemente $b_1, \ldots, b_k$ eines R-Moduls G werden *unabhängig* genannt, falls aus dem Bestehen einer Relation der Form

$$r_1 b_1 + n_1 b_1 + \cdots + r_k b_k + n_k b_k = 0 \qquad (r_i \in R, n_i \in I, i = 1, \ldots, k)$$

immer

$$r_1 b_1 + n_1 b_1 = \cdots = r_k b_k + n_k b_k = 0$$

folgt. Ein System *beliebiger Mächtigkeit* von Elementen $(\neq 0)$ in G wird unabhängig genannt, falls jedes seiner endlichen Untersysteme unabhängig ist.

Die so definierte Unabhängigkeit ist also eine Eigenschaft endlichen Charakters, so daß gemäß dem Zornschen Lemma jede Untermenge U von G ein maximales unabhängiges Elementensystem S enthält. Im Falle $U=G$ sagen wir, S sei ein *maximales unabhängiges Elementensystem* von G. Irgendein Elementensystem von G, das nicht unabhängig ist, wird *abhängig* genannt.

Offenbar ist ein Elementensystem $S=(\ldots, b_\nu, \ldots)$ von G mit $b_\nu \neq 0$ dann und nur dann unabhängig, falls

$$\{\ldots, b_\nu, \ldots\} = \Sigma\{b_\nu\}$$

gilt. Ist $\Sigma\{b_\nu\}=G$, so sagen wir, das Elementensystem S sei eine *Basis* von G. Die Basis ist immer ein maximales unabhängiges Elementensystem von G, das Umgekehrte gilt aber im allgemeinen nicht.

§ 3. Die Ordnung eines Elementes in einem Modul

Es sei g ein Element des R-Moduls G. Die Menge L aller Elemente r von R, die das Element g annullieren, d. h. für die $rg=0$ ist, bildet ein Linksideal des Ringes R. In der Literatur (siehe z. B. [5] und [10]) heißt das Linksideal L die Ordnung des Elementes g. Es ist klar, daß für gewöhnliche Abelsche Gruppen diese Definition im wesentlichen mit der üblichen übereinstimmt: ist die Ordnung eines Elementes a im gewöhnlichen Sinne n, so wird a genau durch das von n im Ringe I erzeugte Hauptideal annulliert. Wenn G ein unitärer R-Modul ist, so ist die obige Definition der Ordnung eines Elementes vollständig befriedigend: in diesem Falle ist nämlich der vom Element g erzeugte zyklische Untermodul dem Faktormodul R/L isomorph, wobei L die Ordnung des Elementes g ist. Ist aber G kein unitärer R-Modul (z. B. ein trivialer R-Modul), so können wir im allgemeinen über den zyklischen Untermodul eines Elementes auf Grund der obigen Definition der Ordnung eines Elementes überhaupt nichts aussagen. Deshalb scheint es nötig, diese Definition zu modifizieren.[4]

Es sei G ein R-Modul. Wir betrachten die wohlbekannte „klassische" Ringerweiterung mit Einselement $R_{(1)}$ des Operatorbereiches R. Der Ring $R_{(1)}$ besteht aus sämtlichen Paaren (r, n) (wo $r \in R$ und n ganz rational) mit den Verknüpfungen

$$\left.\begin{aligned}(r, n)+(s, m) &= (r+s, n+m)\\ (r, n)(s, m) &= (rs+mr+ns, nm)\end{aligned}\right\} \quad r, s \in R;\ n, m \in I.$$

[4] Wenn jemand sich nur auf die Untersuchung unitärer Moduln beschränkt, ist es zweckmäßig, die obige, übliche Definition der Ordnung eines Elementes zu behalten.

Man sieht leicht, daß durch die Definition

$$(r, n)g = rg + ng \qquad (g \in G)$$

der Modul G zu einem $R_{(1)}$-Moduln wird, und zwar zu einem unitären $R_{(1)}$-Modul, da ja das Einselement $(0, 1)$ des Ringes $R_{(1)}$ auf sämtliche Elemente g von G identisch operiert:

$$(0,1)g = 0 \cdot g + 1 \cdot g = g.$$

Nun ist es klar, daß bei der Untersuchung der Struktur des Moduls G dieser sowohl als R-Modul wie auch als $R_{(1)}$-Modul angesehen werden kann.[5] Daher genügt es im Bereich der Operatormoduln viele Probleme ohne Beschränkung der Allgemeinheit nur für den Fall unitärer R-Moduln zu untersuchen.

Nunmehr können wir den Begriff der Ordnung eines Elementes definieren. Ist g ein Element des R-Moduls G, so nennen wir *die Ordnung* von g das Linksideal in $R_{(1)}$, das aus allen Elementen $(r, n) \in R_{(1)}$ besteht, die g annullieren, d. h. für die $(r, n)g = rg + ng = 0$ ist. Die Ordnung von g wird mit $O(g)$ bezeichnet. Jeder R-Modul besitzt ein einziges Element, dessen Ordnung der ganze Ring $R_{(1)}$ ist, nämlich das Nullelement. Ist die Ordnung des Elementes a das Nullideal des Ringes $R_{(1)}$, so heißt a ein Element der Ordnung Null. Es gibt Moduln, in denen jedes von 0 verschiedene Element die Null zur Ordnung hat. Solche Moduln werden *torsionsfrei* genannt. Da der zyklische Untermodul $\{g\}$ des R-Moduls G aus allen Elementen der Form $rg + ng = (r, n)g$ $(r \in R, n \in I)$ besteht, zeigt die Abbildung

$$(r, n) \rightarrow rg + ng \qquad (r \in R, n \in I),$$

daß $\{g\}$ dem Faktormodul $R_{(1)}^{+}/O(g)$ isomorph ist. Ist insbesondere $O(g) = 0$, so folgt $\{g\} \simeq R_{(1)}^{+}$.

Falls wir im folgenden G als eine $R_{(1)}$-Modul betrachten werden, werden wir stets voraussetzen, daß G auf die oben erklärte Weise mit $R_{(1)}$ als linksseitigem Operatorbereich versehen ist.

[5] Wir bemerken, daß die Untermoduln von G, als R-Modul und als $R_{(1)}$-Modul betrachtet, zusammenfallen. Ist G insbesondere ein einfacher R-Modul, so ist er auch ein einfacher $R_{(1)}$-Modul, und umgekehrt. — Auch ist es offenbar, daß irgendein Elementensystem $\ldots, b_\nu, \ldots$ $(\nu \in \Delta)$ des Moduls G dann und nur dann unabhängig ist, falls aus einer Relation der Gestalt

$$(r_1, n_1)\, b_{\nu_1} + \cdots + (r_k, n_k)\, b_{\nu_k} = 0 \qquad (\nu_i \in \Delta,\ (r_i, n_i) \in R_{(1)},\ i = 1, \ldots, k)$$

immer

$$(r_1, n_1)\, b_{\nu_1} = \cdots = (r_k, n_k) b_{\nu_k} = 0$$

folgt.

§ 4. Servanzuntermoduln

Bekanntlich spielt der Begriff der Servanzuntergruppe in der Theorie der Abelschen Gruppen eine große Rolle. Hier möchten wir diesen Begriff auf den Fall beliebiger Operatormoduln übertragen und zugleich einige seiner elementaren Eigenschaften nachweisen.

Bezeichnet x ein unbestimmtes Element und H einen Untermodul des R-Moduls G, dann hat das allgemeinste Gleichungssystem in dieser Unbekannten über H die Gestalt

$$r_\nu x + n_\nu x = h_\nu \qquad (r_\nu \in R, h_\nu \in H, n_\nu \in I, \nu \in \Delta), \tag{1}$$

wo Δ eine beliebige (nichtleere) Indexmenge ist. Falls es ein Element $x \in G$ gibt, für welches das Gleichungssystem (1) erfüllt ist, so sagen wir, daß das Gleichungssystem (1) in G lösbar ist und x zur Lösung hat. Ein Untermodul H eines R-Moduls G heißt *Servanzuntermodul in* G, wenn aus der Lösbarkeit eines Gleichungssystems (1) in G immer auch ihre Lösbarkeit in H folgt. Als Beispiele für Servanzuntermoduln können die Untermoduln O, G und alle direkten Summanden von G dienen.[6] Wir bemerken, daß der Begriff des Servanzuntermoduls im Falle Abelscher Gruppen mit demjenigen der Servanzuntergruppe zusammenfällt. Dies folgt daraus, daß sich im Falle Abelscher Gruppen ein Gleichungssystem (1) immer auf die Gestalt

$$n_\nu x = h_\nu \qquad (h_\nu \in H, n_\nu \in I, \nu \in \Delta)$$

zurückführen läßt. Ein solches Gleichungssystem ist aber der Gleichung

$$nx = h \qquad (h \in H, n \in I)$$

äquivalent, wo n das erzeugende Element des durch die n_ν im Ringe I erzeugten Ideals ist, und falls

$$n = l_1 n_{\nu_1} + \cdots + l_k n_{\nu_k} \qquad (l_1, \ldots, l_k \in I),$$

h durch die Gleichung

$$h = l_1 h_{\nu_1} + \cdots + l_k h_{\nu_k}$$

definiert ist. (h hängt nicht von der Darstellung von n ab.)

Wir erwähnen als eine unmittelbare Folge der Definition, daß *wenn H_1 ein Servanzuntermodul in G, H_2 ein Servanzuntermodul in H_1 ist, so ist auch H_2 ein Servanzuntermodul in G.*

Im Falle gewöhnlicher Abelscher Gruppen ist die Vereinigungsmenge einer aufsteigenden Folge von Servanzuntermoduln immer auch ein Servanz-

[6] Für die Tatsache, daß ein Servanzuntermodul kein direkter Summand sein muß, siehe § 3 in [9]. Der Untermodul T des hier konstruierten Moduls G ist ein Servanzuntermodul, aber kein direkter Summand von G.

untermodul. Diese Behauptung aber verliert ihre Gültigkeit für Operatormoduln. Dies wird durch das folgende Beispiel gezeigt: Es sei $R_1, R_2, \dots, R_n, \dots$ eine Folge von Ringen mit Einselement, und S die vollständige[7] direkte Summe der R_n. So ist S ein Ring mit Einselement, und S^+ als S-Modul hat die Untermoduln

$$R_1, R_1+R_2, \dots, R_1+R_2+\cdots+R_n, \dots \tag{2}$$

als direkte Summanden, umsomehr also als Servanzuntermoduln. Die Vereinigung S_0 der Folge (2) ist aber kein Servanzuntermodul in S^+. Betrachten wir nämlich das Gleichungssystem, bestehend aus sämtlichen Gleichungen der Form $sx=s$ $(s \in S_0)$. Dieses System ist offenbar in S lösbar, läßt aber in S_0 keine Lösung zu, da S_0 als (diskrete) direkte Summe der Ringe $R_1, R_2, \dots$ kein Einselement besitzt.

Es gilt der folgende

Satz 1. *Der Untermodul H des R-Moduls G ist dann und nur dann ein Servanzuntermodul in G, wenn jede Nebenklasse des Faktormoduls G/H eine ordnungstreue Repräsentation gestattet, d. h.: ist $\bar{g}$ ein beliebiges Element des Moduls G/H, so gibt es in G mindestens ein zu der Nebenklasse $\bar{g}$ gehöriges Element g' mit $O(\bar{g})=O(g')$.*

Beweis. Es sei H ein Servanzuntermodul in G und $\bar{g}=g+H$ ein beliebiges Element des Faktormoduls G/H. Ist $O(\bar{g})=0$, so hat auch das Element $g'=g$ die Ordnung Null. Nun nehmen wir an, daß $O(\bar{g})=L \neq 0$. Die Elemente lg $(l \in L)$ gehören alle zu H, und — da H ein Servanzuntermodul in G ist — gibt es in H ein Element h mit $lh=lg$ $(l \in L)$. Das Element $g'=g-h$ fällt in die Nebenklasse $\bar{g}=g+H$ und hat ebenfalls die Ordnung L, weil für $r \in L$ offenbar $rg'=0$ gilt, für $r \notin L$ aber $rg'=$ $=rg-rh$ nicht verschwinden kann, da $rh \in H$, aber $rg \notin H$ ist.

Setzen wir umgekehrt voraus, daß H ein solcher Untermodul des R-Moduls G ist, daß jede ihm entsprechende Nebenklasse eine ordnungstreue Repräsentation zuläßt. Wir zeigen, daß dann H ein Servanzuntermodul in G ist. Es sei (1) ein in G lösbares Gleichungssystem in einer Unbekannten über H und $g \in G$ irgendeine Lösung dieses Systems:

$$r_\nu g + n_\nu g = h_\nu \qquad (r_\nu \in R, h_\nu \in H, n_\nu \in I, \nu \in \Delta).$$

Es sei $\bar{g}=g+H$. Ist $O(\bar{g})=L$, dann gilt offenbar $(r_\nu, n_\nu) \in L$ für jeden Index $\nu \in \Delta$. Andererseits existiert nach unserer Voraussetzung ein Element $g'=g+h$ $(h \in H)$ mit $O(g')=L$. Somit ist

$$(r_\nu, n_\nu)g' = (r_\nu, n_\nu)g + (r_\nu, n_\nu)h = 0 \qquad (\nu \in \Delta)$$

[7] In einer anderen Terminologie: „komplette" oder „uneingeschränkte".

und daher

$$-r_\nu h - n_\nu h = r_\nu g + n_\nu g = h_\nu \qquad (\nu \in \Delta),$$

woraus man schließt, daß das Element $-h \in H$ das Gleichungssystem befriedigt.

Als unmittelbare Folgerungen aus dem obigen Satze ergeben sich:

Ist der Faktormodul G/H torsionsfrei, so ist H ein Servanzuntermodul in G.

Ist G ein torsionsfreier Modul, so ist H dann und nur dann ein Servanzuntermodul in G, wenn auch der Faktormodul G/H torsionsfrei ist.

Mit Hilfe des Satzes 1 erhalten wir

SATZ 2. *Es sei H ein Servanzuntermodul des R-Moduls G. Ist der Faktormodul $\bar{G} = G/H$ eine direkte Summe zyklischen Untermoduln, so ist H ein direkter Summand von G.*

Es sei

(3) $$\bar{G} = \sum_{\lambda \in \Lambda} \{\bar{g}_\lambda\}$$

eine Zerlegung des Faktormoduls G/H in eine direkte Summe zyklischer Untermoduln, und sei für jedes $\lambda \in \Lambda$ ein $g_\lambda \in \bar{g}_\lambda$ mit $O(\bar{g}_\lambda) = O(g_\lambda)$ gewählt (Satz 1!), ferner sei A der durch die Elemente g_λ $(\lambda \in \Lambda)$ erzeugte Untermodul von G: $A = \sum_{\lambda \in \Lambda} \{g_\lambda\}$. Da H und die g_λ zusammen den ganzen Modul erzeugen, muß $G = \{A, H\}$ sein. Es sei anderseits $a \in A \cap H$ und

$$a = (r_1, n_1) g_{\lambda_1} + \cdots + (r_k, n_k) g_{\lambda_k} \qquad ((r_i, n_i) \in R_{(1)}).$$

Da a auch ein Element von H ist, gilt die Gleichung

$$(r_1, n_1) \bar{g}_{\lambda_1} + \cdots + (r_k, n_k) \bar{g}_{\lambda_k} = 0.$$

Aber auf Grund von (3) sind die Elemente $\bar{g}_\lambda$ unabhängig in $\bar{G}$, so daß

$$(r_i, n_i) \bar{g}_{\lambda_i} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, k)$$

ist, und da die Ordnungen der Elemente $\bar{g}_{\lambda_i}$ und g_{λ_i} übereinstimmen, folgen die Gleichungen

$$(r_i, n_i) g_{\lambda_i} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, k).$$

Daraus ergibt sich $a = 0$, d. h. $A \cap H = 0$. Damit haben wir bewiesen, daß H ein direkter Summand von G ist, und zwar gilt $G = H + A$.

SATZ 3. *Es sei H ein Servanzuntermodul des R-Moduls G und A ein den Untermodul H enthaltender Untermodul von G. A ist dann und nur dann ein Servanzuntermodul in G, wenn A/H ein Servanzuntermodul in G/H ist.*

BEWEIS. Es sei A/H ein Servanzuntermodul in G/H und

(4) $$(r_\nu, n_\nu)\, x = a_\nu \qquad (a_\nu \in A, (r_\nu, n_\nu) \in R_{(1)}, \nu \in \Delta)$$

ein Gleichungssystem über A, das das Element $x \in G$ zur Lösung hat. Wir zeigen, daß das System (4) auch eine Lösung in A hat. Da A/H ein Servanzuntermodul in G/H ist, so gibt es ein Element $a \in A$ und Elemente $h_\nu \in H$ $(\nu \in \Delta)$, für welche die Gleichungen

(5) $$(r_\nu, n_\nu) a = a_\nu + h_\nu \qquad (\nu \in \Delta)$$

gültig sind. Aus den Gleichungssystemen (4) und (5) folgen die Gleichungen

$$(r_\nu, n_\nu)(a - x) = h_\nu \qquad (\nu \in \Delta),$$

und da H ein Servanzuntermodul in G ist, ergibt sich die Existenz eines Elementes h von H derart, daß

(6) $$(r_\nu, n_\nu) h = h_\nu \qquad (\nu \in \Delta)$$

ist. Auf Grund von (5) und (6) folgt

$$(r_\nu, n_\nu)(a - h) = a_\nu \qquad (\nu \in \Delta),$$

wo offenbar $a - h \in A$ ist. Damit ist die erste Hälfte unserer Behauptung bewiesen.

Umgekehrt sei A ein Servanzuntermodul in G und

$$(r_\nu, n_\nu)(g + H) = a_\nu + H \qquad (a_\nu \in A, \nu \in \Delta)$$

ein Gleichungssystem über A/H mit einem Element $g \in G$. Dann existieren Elemente $h_\nu \in H$ mit

$$(r_\nu, n_\nu) g = a_\nu + h_\nu \in A \qquad (\nu \in \Delta).$$

Da A ein Servanzuntermodul in G ist, gibt es ein Element $a \in A$ mit

$$(r_\nu, n_\nu) a = a_\nu + h_\nu \qquad (\nu \in \Delta)$$

und so ist

$$(r_\nu, n_\nu)(a + H) = a_\nu + H.$$

Damit ist bewiesen, daß A/H ein Servanzuntermodul in G/H ist. Wir bemerken, daß beim Beweis der zweiten Hälfte der Behauptung des Satzes der Servanzcharakter des Untermoduls H nicht ausgenutzt wird. Deshalb haben wir etwas mehr bewiesen: *bei einer homomorphen Abbildung geht ein Servanzuntermodul, der den Kern des Homomorphismus enthält, stets in einen Servanzuntermodul über.*

§ 5. Charakterisierung der vollständig reduziblen Moduln durch Invarianten

Wir nennen einen R-Modul G *vollständig reduzibel*, falls er eine Zerlegung in eine direkte Summe einfacher R-Moduln zuläßt. Wir wollen in diesem Paragraphen für den Fall eines gegebenen Ringes R eine vollständige Übersicht über die Klasse aller möglichen vollständig reduziblen R-Moduln gewinnen. Wir werden zeigen, daß man ein System von Invarianten angeben kann, das eine vollständige Beschreibung dieser Klasse liefert.

Es sei R ein beliebiger, aber im folgenden festbleibender Ring. Vor allem geben wir eine Übersicht der einfachen R-Moduln. Ist A ein einfacher R-Modul, dann ist er auch ein einfacher $R_{(1)}$-Modul. Für ein beliebiges Element $a\,(\neq 0)$ in A ist der zyklische Untermodul $R_{(1)}a$ von 0 verschieden, so daß $R_{(1)}a = A$ gilt. Die Abbildung

$$(r, n) \to (r, n)a \qquad ((r, n) \in R_{(1)})$$

ist eine homomorphe Abbildung von $R_{(1)}^{+}$ auf A. Ist L der Kern dieses Homomorphismus, dann ist $L = O(a)$ und

$$R_{(1)}^{+}/L \simeq A,$$

wo L notwendigerweise ein *maximales Linksideal* im Ring $R_{(1)}$ ist. Umgekehrt ist es klar, daß wenn L ein maximales Linksideal in $R_{(1)}$ ist, so ist der Modul $R_{(1)}^{+}/L$ ein einfacher $R_{(1)}$-Modul, und somit auch ein einfacher R-Modul. *Ein R-Modul A ist* folglich *dann und nur dann einfach, wenn er einem, als R-Modul aufgefaßten Faktormodul $R_{(1)}^{+}/L$ isomorph ist, wo L irgendein maximales Linksideal des Ringes $R_{(1)}$ bedeutet.*

Wir bemerken, daß für zwei Elemente $a \neq 0$, $b \neq 0$ eines einfachen R-Moduls A im allgemeinen $O(a) \neq O(b)$ ist, aber immer $R_{(1)}^{+}/O(a) \simeq R_{(1)}^{+}/O(b)$ gilt. Ist der Ring R auch noch kommutativ, dann gilt auch $O(a) = O(b)$.

Jetzt gehen wir auf die Untersuchung der vollständig reduziblen R-Moduln über. Wir nennen die Linksideale L_1 und L_2 des Ringes $R_{(1)}$ *äquivalent*, falls $R_{(1)}^{+}/L_1 \simeq R_{(1)}^{+}/L_2$ gilt und betrachten die Klassen äquivalenter Linksideale von $R_{(1)}$. Zu jeder solchen Klasse C gehört ein R-Modul A, und zwar der Faktormodul von $R_{(1)}^{+}$ nach irgendeinem zur Klasse gehörigen Linksideal. Dieser Faktormodul wird der betreffenden Klasse gehörige Modul genannt. Ordnen wir jeder Klasse C_ϑ $(\vartheta \in \Theta)$ von maximalen Linksidealen eine Kardinalzahl $\mathfrak{m}_\vartheta$ $(\vartheta \in \Theta)$ zu, so gewinnen wir ein System S der Paare $[C_\vartheta, \mathfrak{m}_\vartheta]$ $(\vartheta \in \Theta)$. Nunmehr können wir zwischen der Menge aller solchen (verschiedenen[8]) Systeme S einerseits, und der Menge aller möglichen (paarweise nichtiso-

[8] Natürlich sind zwei Systeme S und S' verschieden, falls mindestens für einen Index $\vartheta \in \Theta$ $\mathfrak{m}_\vartheta \neq \mathfrak{m}'_\vartheta$ gilt.

morphen) vollständig reduziblen R-Moduln andererseits auf folgende Weise eine umkehrbar eindeutige Beziehung herstellen: Es sei S gegeben. Wir betrachten jeden, zur Klasse C_ϑ gehörigen (notwendigerweise einfachen) R-Modul in so viel Exemplaren, wie die entsprechende Mächtigkeit $\mathfrak{m}_\vartheta$ zeigt. Die direkte Summe der somit gewonnenen Moduln ist ein wohlbestimmter vollständig reduzibler R-Modul, den wir nun dem System S zuordnen. Umgekehrt sei G ein vollständig reduzibler R-Modul, und betrachten wir eine Darstellung von G als direkte Summe einfacher R-Moduln. Auf Grund einer solchen direkten Zerlegung ordnen wir dem Modul G dasjenige System S zu, in dem, für jeden Index $\vartheta \in \Theta$, $\mathfrak{m}_\vartheta$ die Mächtigkeit der mit dem zur Klasse C_ϑ gehörigen R-Modul A isomorphen direkten Summanden in der gegebenen Zerlegung von G bedeutet. Um zu beweisen, daß das System S ein den Modul G vollständig charakterisierenden Invariantensystem darstellt, müssen wir noch zeigen, daß eine beliebige andere Zerlegung von G in eine direkte Summe einfacher R-Moduln zu demselben System S führt. Dies ist die Aussage von

SATZ 4. *Es seien für den vollständig reduziblen R-Modul G zwei Zerlegungen in eine direkte Summe einfacher R-Moduln angegeben. Dann ist es möglich, zwischen den direkten Summanden der zwei Zerlegungen eine solche umkehrbar eindeutige Beziehung herzustellen, bei welcher die einander entsprechenden Summanden isomorph sind.*

BEMERKUNG. Die Behauptung folgt aus einem Satze von A. KUROSCH, der eine Verallgemeinerung des Jordan—Hölder—Schreierschen Satzes auf den Fall unendlicher Normalketten darstellt. (Siehe [10] und [9].) Wir geben hier einen direkten Beweis des Satzes, durch welchen die Frage teilweise auf den in [1] erörterten Fall endlich vieler Summanden zurückgeführt wird.

Zum Beweise brauchen wir den folgenden

HILFSSATZ.[9] *Der R-Modul H sei eine direkte Summe der einfachen R-Moduln $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Dann gibt es zwischen irgend $k+1$ Elementen von H ein solches, das sich als (linksseitige) $R_{(1)}$-Kombination der übrigen k Elemente darstellen läßt.*

BEWEIS. Es sei

$$H \dot{=} A_1 + A_2 + \cdots + A_k \tag{7}$$

und für die beliebigen Elemente $h_1, h_2, \ldots, h_k, h_{k+1} \in H$ gelte auf Grund von (7)

$$h_i = \sum_{j=1}^{k} h_j^{(i)} \qquad (h_j^{(i)} \in A_j; \quad i = 1, 2, \ldots, k+1).$$

[9] Für den speziellen Fall, wo der triviale Teilmodul des Moduls H gleich 0 ist, findet sich der Beweis dieses Hilfssatzes in [1].

Wir zeigen, daß es zwischen den Elementen $h_1, \dots, h_{k+1}$ ein solches gibt, das sich als eine $R_{(1)}$-Kombination der übrigen darstellen läßt. Unsere Behauptung ist jedenfalls für $k=1$ richtig. Nehmen wir an, daß sie auch für $k-1$ gilt. Gehören die Elemente h_i alle zum Untermodul $H' = H_2 + \cdots + H_k$, dann sind wir unter Zuhilfenahme unserer Induktionshypothese fertig. Gilt aber z. B. $h_1 \notin H'$, dann ist sicher $h_1^{(1)} \neq 0$, und da A_1 ein einfacher R-Modul ist, so enthält der Ring $R_{(1)}$ Elemente (r_i, n_i) mit

$$h_1^{(i)} = (r_i, n_i)\, h_1^{(1)} \qquad (i = 2, \dots, k+1).$$

Die Elemente

$$h_2' = h_2 - (r_2, n_2) h_1, \dots, h_{k+1}' = h_{k+1} - (r_{k+1}, n_{k+1}) h_1 \tag{8}$$

liegen dann alle im Untermodul H', und da ihre Zahl k beträgt, so besteht nach der Induktionshypothese eine Relation

$$h_2' = (s_3, m_3) h_3' + \cdots + (s_{k+1}, m_{k+1}) h_{k+1}' \quad ((s_j, m_j) \in R_{(1)};\ j = 3, 4, \dots, k+1) \tag{9}$$

für eine passend gewählte Reihenfolge der Elemente h_i'. Setzen wir (8) in (9) ein, so gewinnen wir

$$\begin{aligned} h_2 = ((r_2, n_2) - (s_3, m_3)(r_3, n_3) - \cdots - (s_{k+1}, m_{k+1})(r_{k+1}, n_{k+1})) h_1 + \\ + (s_3, m_3) h_3 + \cdots + (s_{k+1}, m_{k+1}) h_{k+1}, \end{aligned}$$

womit wir unseren Hilfssatz bewiesen haben.

Beweis des Satzes 4. Es seien

$$G = \sum_{\nu \in \Gamma} A_\nu \tag{10}$$

und

$$G = \sum_{\mu \in \Delta} B_\mu, \tag{11}$$

wo A_ν $(\nu \in \Gamma)$ und B_μ $(\mu \in \Delta)$ einfache Moduln sind, zwei direkte Zerlegungen des Moduls G. Das Element $0 \neq a_\nu \in A_\nu$ läßt auf Grund der Zerlegung (11) eine eindeutige Darstellung

$$a_\nu = b_{\mu_1} + b_{\mu_2} + \cdots + b_{\mu_k}$$

mit $0 \neq b_{\mu_i} \in B_{\mu_i}$ $(i = 1, 2, \dots, k)$ zu. Da a_ν das erzeugende Element des Moduls A_ν ist, gilt offenbar $A_\nu \subseteq \sum_{i=1}^{k} B_{\mu_i}$. Weiterhin ist, wegen der Einfachheit von A_ν, die Projektion (in (11)) des Moduls A_ν auf den Modul B_{μ_i} notwendigerweise ein Isomorphismus, da ja der Kern des Homomorphismus gleich Null ist. Somit sehen wir, daß die direkte Zerlegung (11) mit A_ν isomorphe direkte Summanden enthält, und daß A_ν in der direkten Summe sämtlicher solcher Summanden liegt. Daraus folgt nun, daß wenn wir die direkte Summe

sämtlicher in der Zerlegung (10) bzw. (11) auftretenden, mit A_ν isomorphen direkten Summanden mit U bzw. V bezeichnen, $U = V$ gilt. Wenn wir nun auch noch zeigen können, daß die Mächtigkeit der direkten Summanden in V übereinstimmt, so wird damit unser Beweis fertig sein.

Um diese letztere Behauptung nachzuweisen, genügt es, folgendes zu zeigen: *Ist der R-Modul G die direkte Summe einer Menge der Mächtigkeit $\mathfrak{m}$ von einfachen R-Moduln, dann ist in G jedes Elementensystem von einer $\mathfrak{m}$ übertreffenden Mächtigkeit abhängig.* Für endliche $\mathfrak{m}$ folgt unsere Behauptung aus dem Hilfssatz. Es sei demnach $\mathfrak{m}$ eine unendliche Kardinalzahl, und W ein Elementensystem der Mächtigkeit $\mathfrak{n}$ aus G, mit $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$. Wir zeigen, daß W nicht unabhängig sein kann. Betrachten wir die Menge T sämtlicher solcher Teilmoduln H_λ von G, die als direkte Summe endlich vieler der in der gegebenen Zerlegung von G auftretenden direkten Summanden entstehen. Die Menge T hat auch die Mächtigkeit $\mathfrak{m}$. Falls nun jedes Element H_λ der Menge T, als Untermodul von G nur eine endliche Teilmenge des Systems W enthalten würde, so könnten wir, da jedes Element von W in mindestens einem Untermodul H_λ enthalten ist, daraus folgern, daß die Mächtigkeit $\mathfrak{n}$ von W höchstens gleich $\mathfrak{m}$ ist, entgegen unserer Voraussetzung. Der Modul G hat demnach einen, als direkte Summe endlich vieler einfacher R-Moduln darstellbaren Untermodul, der unendlich viele Elemente aus W enthält. Wir wenden jetzt noch den Hilfssatz an, und damit ist der Beweis unseres Satzes zu Ende geführt.

§ 6. Kennzeichnungen der vollständig reduziblen Moduln

Der vorliegende Paragraph ist dem Beweis des folgenden Satzes gewidmet:

SATZ 5.[10] *Es sei R ein Ring. Für einen R-Modul G sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

a) *G ist ein vollständig reduzibler Modul;*

b) *es existiert in G eine Menge von maximalen Untermoduln, die als Durchschnitt das Element 0 haben, und G erfüllt die Minimalbedingung für zyklische Untermoduln;*

c) *G ist durch minimale Untermoduln erzeugt;*

d) *die Ordnung jedes Elementes ($\neq 0$) in G ist der Durchschnitt von endlich vielen maximalen Linksidealen des Ringes $R_{(1)}$;*

[10] Die Äquivalenz der Bedingungen a), c), e) war bereits früher bekannt. (Siehe z. B. [3].)

e) *jeder Untermodul von G ist ein direkter Summand in G;*

f) *jeder Untermodul von G ist ein Servanzuntermodul in G;*

g) *jedes maximale, unabhängige System von Elementen des Moduls G ist eine Basis von G.*

BEWEIS.

Aus a) *folgt* b). Nehmen wir an, daß der R-Modul G die direkte Summe der einfachen R-Moduln A_ν ist:

$$G = \sum_{\nu \in \Delta} A_\nu .$$

Dann ist der Modul $M_\mu = \sum_{\nu \neq \mu} A_\nu$ offenbar ein maximaler Untermodul von G, und der Durchschnitt sämtlicher solcher maximaler Untermoduln M_μ $(\mu \in \Delta)$ ist 0. Auch ist jedes Element $g \neq 0$ von G in einer direkten Summe endlich vieler einfacher R-Moduln enthalten, welche offenbar der Minimalbedingung für Untermoduln genügt, so daß in G die Minimalbedingung für zyklische Untermoduln erfüllt ist.

Aus b) *folgt* c). Es sei der Durchschnitt der maximalen Untermoduln M_ν $(\lambda \in \Lambda)$ des Moduls G gleich 0, und es sei in G die Minimalbedingung für zyklische Untermoduln erfüllt. Wir zeigen, daß jedes Element g von G in einer direkten Summe endlich vieler minimaler Untermoduln enthalten ist, woraus c) offenbar folgt. Unserer Voraussetzung gemäß enthält der zyklische Modul $\{g\}$ jedenfalls einen minimalen Untermodul H_1. Dann gibt es ein M_{λ_1} mit $H_1 \cap M_{\lambda_1} = 0$, d. h. die direkte Summe $H_1 + M_{\lambda_1}$ existiert und ist gleich dem Modul G. Auf Grund dieser direkten Zerlegung sei $g = h_1 + m_1$. Dann ist $\{g\} = \{h_1\} + \{m_1\}$. Falls $\{m_1\}$ bereits ein minimaler Untermodul ist, dann sind wir mit dem Beweise fertig. Im entgegengesetzten Fall enthält $\{m_1\}$ einen minimalen Untermodul H_2, und durch ein ähnliches Verfahren wie vorher, gewinnen wir $\{g\} = \{h_1\} + \{h_2\} + \{m_2\}$, wo $\{h_1\}$ und $\{h_2\}$ minimale Untermoduln sind. Dieses Verfahren führt in endlich vielen Schritten zu einem minimalen Untermodul $\{m_i\}$, da

$$\{g\} \supset \{m_1\} \supset \{m_2\} \supset \cdots$$

eine streng abnehmende Kette von zyklischen Untermoduln ist.

Aus c) *folgt* d). Es sei G durch die minimalen Untermoduln A_ν erzeugt. Ist $g \neq 0$ ein Element von G und gilt $g \in \{A_{\nu_1}, \ldots, A_{\nu_k}\}$, so können wir voraussetzen, daß

$$\{A_{\nu_1}, \ldots, A_{\nu_k}\} = A_{\nu_1} + \cdots + A_{\nu_k} \tag{12}$$

ist, und daß die der Zerlegung (12) entsprechende Darstellung von g die

Gestalt

$$g = a_{\nu_1} + \cdots + a_{\nu_k} \qquad (0 \neq a_{\nu_i} \in A_{\nu_i};\ i = 1, \ldots, k)$$

hat. Da nun $O(a_{\nu_i}) = L_i$ ein maximales Linksideal in $R_{(1)}$ ist, und g genau durch diejenigen Elemente $(r, n) \in R_{(1)}$ annulliert wird, welche sämtliche Komponenten a_{ν_i} annullieren, so hat man offenbar

$$O(g) = L_1 \cap \cdots \cap L_k = D \tag{13}$$

und das ist eben, was wir nachweisen wollten.

Aus d) *folgt* e). Nehmen wir an, daß die Ordnung jedes Elementes $g \neq 0$ von G die Gestalt (13) hat, wo $L_1, \ldots, L_k$ maximale Linksideale in $R_{(1)}$ sind. Wir zeigen, daß jeder Untermodul H von G ein direkter Summand von G ist. Es sei K ein maximaler unter denjenigen Untermoduln von G, die mit H den Durchschnitt 0 haben. (Die Existenz eines solchen Untermoduls K wird durch das Zornsche Lemma gesichert.) Wir behaupten, daß

$$G = H \dotplus K. \tag{14}$$

Offenbar ist es genügend, für ein beliebiges $g \in G$

$$g \in B_1 + \cdots + B_k \tag{15}$$

nachzuweisen, wo $B_1, \ldots, B_k$ minimale Untermoduln von G sind. Wegen der Maximalität des Untermoduls K ist nämlich $B_j \cap (H \dotplus K) \neq 0$, also $B_j \cap (H \dotplus K) = B_j$ $(j = 1, \ldots, k)$, und somit $B_1 + \cdots + B_k \subseteq H \dotplus K$. Demnach folgt aus (15) tatsächlich (14).

Um einen Nachweis von (15) zu erbringen, setzen wir jetzt voraus, daß man in der Darstellung (13) der Ordnung des Elementes g kein L_i weglassen darf. Dann gibt es Elemente $(u_1, l_1), \ldots, (u_k, l_k)$ in $R_{(1)}$ mit

$$\begin{cases} (u_i, l_i) \in L_1 \cap \cdots \cap L_{i-1} \cap L_{i+1} \cap \cdots \cap L_k, \\ (u_i, l_i) \notin L_i \qquad (i = 1, \ldots, k). \end{cases} \tag{16}$$

Mit Rücksicht auf die Maximalität der Linksideale L_i und auf (16) kann man der Reihe nach solche Elemente

$$(v_1, m_1) \in L_1, (v_2, m_2) \in L_2, \ldots, (v_k, m_k) \in L_k$$

bestimmen, für welche die Beziehungen

$$\begin{aligned} (0, 1) &= (v_1, m_1) + (z_1, n_1)(u_1, l_1), \\ (v_1, m_1) &= (v_2, m_2) + (z_2, n_2)(u_2, l_2), \\ (v_2, m_2) &= (v_3, m_3) + (z_3, n_3)(u_3, l_3), \\ &\vdots \\ (v_{k-1}, m_{k-1}) &= (v_k, m_k) + (z_k, n_k)(u_k, l_k) \end{aligned} \tag{17}$$

mit $(z_i, n_i) \in R_{(1)}$ gelten. Aus diesen Relationen folgt

$$(0, 1) = (z_1, n_1)(u_1, l_1) + \cdots + (z_k, l_k)(u_k, l_k) + (v_k, m_k),$$

und daher

$$g = (z_1, n_1)(u_1, l_1)g + \cdots + (z_k, n_k)(u_k, l_k)g,$$

da auf Grund von (17) und (16) $(v_k, m_k) \in D = O(g)$, also $(v_k, m_k)g = 0$ ist. Wenn wir noch zeigen können, daß die Moduln $\{(z_i, n_i)(u_i, l_i)g\}$ $(i = 1, \ldots, k)$ in G minimal sind, so wird der Beweis von (15) und folglich auch der von (14) vollständig sein.

Daß $\{(z_i, n_i)(u_i, l_i)g\}$ ein minimaler R-Modul ist, folgt aus der leicht beweisbaren Beziehung

(18) $$O((z_i, n_i)(u_i, l_i)g) = L_i \qquad (i = 1, \ldots, k)$$

und daraus, daß L_i ein maximales Linksideal in $R_{(1)}$ ist. Da nun $(x, t) \in O((z_i, n_i)(u_i, l_i)g)$ der Relation $(x, t)(z_i, n_i)(u_i, l_i) \in O(g) = D$ äquivalent ist, müssen wir zum Beweise von (18) zeigen, daß $(x, t)(z_i, n_i)(u_i, l_i) \in D$ dann und nur dann besteht, falls $(x, t) \in L_i$ ist.

Nehmen wir an, daß für $(x, t) \in R_{(1)}$ die Relation $(x, t)(z_i, n_i)(u_i, l_i) \in D$ gilt. Dann ist $(x, t)(z_i, n_i)(u_i, l_i) \in L_i$. Indem wir jede der Gleichungen (17) von links mit (x, t) multiplizieren, erhalten wir aus der i-ten Gleichung $(x, t)(v_{i-1}, m_{i-1}) \in L_i$. Nach oben weiterfahrend, erhalten wir aus unseren Gleichungen der Reihe nach

$$(x, t)(v_{i-2}, m_{i-2}) \in L_i, \ldots, (x, t) \in L_i.$$

Umgekehrt sei $(x, t) \in L_i$. In diesem Falle erhalten wir aus unseren Gleichungen (diesmal von oben nach unten fortschreitend) auf Grund von (16) der Reihe nach die Relationen

$$(x, t)(v_1, m_1) \in L_i, (x, t)(v_2, m_2) \in L_i, \ldots, (x, t)(v_{i-1}, m_{i-1}) \in L_i,$$

und so aus der i-ten Gleichung (unter Berücksichtigung von $(v_i, m_i) \in L_i$)

$$(x, t)(v_{i-1}, m_{i-1}) - (x, t)(v_i, m_i) = (x, t)(z_i, n_i)(u_i, l_i) \in L_i.$$

Dies bedeutet aber, zusammen mit (16), gerade $(x, t)(z_i, n_i)(u_i, l_i) \in D$, womit wir unsere letztere Behauptung bewiesen haben.

Aus e) *folgt* f). Dies ist offenbar, da jeder direkte Summand von G ein Servanzuntermodul in G ist.

Aus f) *folgt* g). Es sei $S = (\ldots, b_\lambda, \ldots)_{\lambda \in \Lambda}$ ein maximales unabhängiges Elementensystem in G. Wir setzen $H = \sum_{\lambda \in \Lambda} \{b_\lambda\}$ und zeigen, daß $G = H$ ist. Nehmen wir an, daß es entgegen unserer Behauptung ein Element $g \in G$ mit $g \notin H$ gilt. Die Nebenklasse $g + H$ als ein Element des Faktormoduls G/H, hat als Ordnung irgendein Linksideal des Ringes $R_{(1)}$. Dann gibt es wegen des Satzes 1 in der Nebenklasse $g + H$ ein Element $g' = g + h$ $(h \in H)$ von derselben Ordnung L. Für dieses g' gilt im Falle $(r, n) \notin L$ wegen $(r, n)g \notin H$ und $(r, n)h \in H$ die Relation $(r, n)g' = (r, n)g + (r, n)h \notin H$. Darum

ist $\{g'\} \cap H = 0$ und, da S ein maximales unabhängiges System ist, gilt notwendigerweise $g' = 0$, d. h. $g = -h$. Wegen $g \notin H$ und $h \in H$ bedeutet dies aber einen Widerspruch. Dieser Widerspruch beweist die Gleichheit $H = G$, und somit den Basischarakter des Elementensystems S.

Aus g) *folgt* a). Wir beweisen: wenn jedes maximale unabhängige Elementensystem von G eine Basis ist, so ist G eine direkte Summe einfacher R-Moduln. Den Kern des Beweises bildet der Nachweis, daß jeder zyklische Untermodul eines Moduls der Eigenschaft g) einen minimalen Untermodul enthält. Setzen wir nämlich voraus, daß wir dies schon bewiesen haben. Dann gibt es nach dem Zornschen Lemma in G ein maximales System solcher unabhängiger Elemente, die je einen minimalen Untermodul erzeugen. So ein System S im Modul G ist gewiß maximal unabhängig, da der zyklische Untermodul eines jeden Elementes von G einen minimalen Untermodul enthält, und jedes Element dieses Untermoduls vom System S abhängig ist. S ist also eine Basis, womit unsere Behauptung nachgewiesen ist.[11]

Um zu beweisen, daß jeder zyklische Untermodul eines Moduls G der Eigenschaft g) einen minimalen Untermodul enthält, zeigen wir vor allem, daß auch jeder Untermodul von G die Eigenschaft g) hat. Es sei H ein Untermodul von G und $V = (\ldots, a_\nu, \ldots)$ ein maximales unabhängiges Elementensystem in H. Durch Hinzunahme von Elementen $\ldots, b_\mu, \ldots$ ergänzen wir dieses System zu einem maximalen unabhängigen Elementensystem W von G. Nach unserer Voraussetzung ist W eine Basis von G, d. h. es ist

$$G = \sum_\nu \{a_\nu\} + \sum_\mu \{b_\mu\}. \tag{19}$$

Demnach gilt offenbar $H = \sum\limits_\nu \{a_\nu\}$, da in der (19) entsprechenden Zerlegung irgendeines Elementes h von H wegen der Maximalität des unabhängigen Elementensystems V die Komponente aus $\sum\limits_\mu \{b_\mu\}$ gleich Null sein muß.

Es sei nunmehr g ein beliebiges Element des R-Moduls G der Eigenschaft g). Dann hat auch der zyklische Modul $\{g\} = K$ die Eigenschaft g). Ist K selbst noch nicht minimal, dann hat er einen von 0 verschiedenen echten Untermodul K_1. Es sei $0 \neq g_1 \in K_1$ und S_1 irgendein, g_1 enthaltendes maximales unabhängiges System in K. S_1 besteht aus mindestens zwei Elementen, da S_1 eine Basis von K, und K_1 ein echter Untermodul von K ist. Ist auch der Modul $\{g_1\}$ nicht minimal, dann hat er einen von 0 verschiedenen echten Untermodul K_2. Es sei $0 \neq g_2 \in K_2$. Da g_2 und die von g_1 ver-

[11] Hier müssen wir noch die offenbare Tatsache bemerken, daß ein minimaler Untermodul eines R-Moduls ein einfacher R-Modul ist.

schiedenen Elemente von S_1 ein unabhängiges System bilden, kann man dieses System zu einem mindestens drei Elemente enthaltenden, maximalen unabhängigen System S_2 des Moduls K ergänzen. Indem wir nun dieses Verfahren im Untermodul $\{g_2\}$ fortsetzen, müssen wir in endlich vielen Schritten zu einem minimalen Untermodul gelangen. Anderenfalls würde nämlich der Modul K ein unendliches maximales unabhängiges Elementensystem, und folglich, kraft der Eigenschaft g) eine unendliche Basis besitzen. Das ist aber unmöglich, da g nicht die direkte Summe unendlich vieler Moduln erzeugen kann.

Damit haben wir den Beweis des Satzes 5 beendet.

Wir erwähnen, daß aus der Bedingung c) bzw. aus e) sich als eine unmittelbare Folge die wichtige Eigenschaft der vollständig reduziblen Moduln ergibt, daß *jedes homomorphe Bild bzw. jeder Untermodul eines solchen Moduls ebenfalls vollständig reduzibel ist.*

Jetzt machen wir noch eine Bemerkung über den Endomorphismenring[12] eines vollständig reduziblen Moduls. Wir beweisen folgendes:

Das Jacobsonsche Radikal des Endomorphismenringes E eines vollständig reduziblen R-Moduls G ist gleich 0.

Es sei

$$G = \sum_{\nu} \{a_\nu\},$$

wo sämtliche Elemente a_ν einfache R-Moduln erzeugen. Wir betrachten die Endomorphismen des Moduls G als rechtsseitige Operatoren und bezeichnen sie mit griechischen Buchstaben: $\varrho, \sigma, \ldots$. Es bedeute $M(a_\nu)$ die Menge aller solchen Endomorphismen von G, die das Element a_ν in 0 überführen; $M(a_\nu)$ ist offenbar ein Rechtsideal von E. Da E ein Ring mit Einselement ist, und das Jacobsonsche Radikal eines solchen Ringes gleich dem Durchschnitt aller maximalen Rechtsideale ist [4], genügt es zu zeigen, daß $M(a_\nu)$ ein maximales Rechtsideal in E ist. In diesem Falle ist nämlich $\bigcap_{\nu} M(a_\nu) = 0$ und demnach ist der Durchschnitt aller maximalen Rechtsideale um so mehr gleich 0.

Um nachzuweisen, daß $M(a_\nu)$ ein maximales Rechtsideal in E ist, werden wir zeigen, daß für $\varrho \notin M(a_\nu)$ das Einselement 1 des Ringes E in dem durch $M(a_\nu)$ und ϱ erzeugten Rechtsideal enthalten ist. Wegen $a_\nu \varrho \neq 0$ induziert die Abbildung $a_\nu \to a_\nu \varrho$ eine isomorphe Abbildung des Moduls $\{a_\nu\}$ auf den Modul $\{a_\nu \varrho\}$. Es sei ϱ^* die Inverse dieser Abbildung, welche

[12] Unter einem Endomorphismus des Moduls G verstehen wir irgendeine operatorhomomorphe Abbildung von G in sich selbst. Für den Begriff des Endomorphismenringes s. z. B. [10].

demnach den Modul $\{a_\nu \varrho\}$ solcherart auf $\{a_\nu\}$ abbildet, daß $a_\nu \varrho \rightarrow a_\nu$ gilt. Dann kann man aber, da $\{a_\nu \varrho\}$ als direkter Summand in G enthalten ist, ϱ^* zu einem solchen Endomorphismus σ von G erweitern, für welchen $(a_\nu \varrho)\sigma = a_\nu$ gilt. So ist $a_\nu(\varrho\sigma - 1) = 0$, $\varrho\sigma - 1 \in M(a_\nu)$, so daß 1 tatsächlich ein Element des durch $M(a_\nu)$ und ϱ erzeugten Rechtsideals ist.[13]

§ 7. Das duale Problem

Bei der Untersuchung einer beliebigen Klasse von Operatormoduln kann man die duale Frage stellen, ob es Ringe R gibt, für welche jeder R-Modul in die betreffende Klasse von Moduln fällt, und welche Ringe diese Eigenschaft besitzen. Wir haben in §§ 5 und 6 die Klasse der vollständig reduziblen Moduln untersucht, und jetzt betrachten wir die duale Frage bezüglich dieser Klasse von Moduln. Da jede Abelsche Gruppe jeden Ring als trivialen Operatorbereich zuläßt, gibt es keinen Ring R, für welchen sämtliche R-Moduln vollständig reduzibel wären. Dementsprechend suchen wir diejenigen Ringe R zu bestimmen, für die jeder R-Modul eine direkte Summe eines trivialen Untermoduls und eines vollständig reduziblen R-Moduls ist. Wir zeigen, daß die den vollständig reduziblen Moduln auf diese Weise zugeordnete Klasse von Ringen genau die Klasse der (im klassischen Sinne) halbeinfachen Ringe ist.

Unter einem halbeinfachen Ring verstehen wir einen Ring, der keine von Null verschiedenen nilpotenten Linksideale besitzt, und für Linksideale der Minimalbedingung genügt. Nach dem wohlbekannten Wedderburn—Artinschen Struktursatz ist ein solcher Ring der direkten Summe endlich vieler Ringe isomorph, deren jeder dem Ringe sämtlicher linearen Transformationen eines endlich dimensionalen Vektorraumes über einem Schiefkörper isomorph ist. (Siehe z. B. [13] und [12].) Eine Charakterisierung der halbeinfachen Ringe wird durch den folgenden Satz gegeben [2]: *Ein Ring ist dann und nur dann halbeinfach, wenn jedes seiner Linksideale ein rechtsseitiges Einselement besitzt.* Im weiteren werden wir in unseren Beweisen nur diese letztere Charakterisierung der halbeinfachen Ringe verwenden.

Auch als Operatorbereiche sind die halbeinfachen Ringe durch bemerkenswerte Eigenschaften ausgezeichnet. Ein diesbezügliches Resultat stellt

[13] Im obigen haben wir nur eine einzige Eigenschaft des Endomorphismenringes der vollständig reduziblen Moduln nachgewiesen. Tatsächlich läßt ein solcher Ring auch eine konkrete Darstellung als direkte Summe von Matrixringen über Schiefkörpern leicht zu. Das anzuwendende Verfahren gleicht demjenigen, das in [13] für den Fall des Endomorphismenringes von Moduln, welche direkte Summen von endlich vielen einfachen Moduln sind, herangezogen wird.

der folgende Satz von O. GOLDMAN dar [3]: *Ein Ring R ist dann und nur dann halbeinfach, falls sich jeder R-Modul als direkte Summe seines maximalen trivialen Untermoduls und eines vollständig reduziblen R-Moduls darstellen läßt.* Wir werden Kriterien von ähnlicher Beschaffenheit beweisen, wobei wir auch für den Satz von GOLDMAN einen einfachen Beweis gewinnen werden.

Vor allem beweisen wir zwei Lemmas:

LEMMA 1. *Ein beliebiger Ring R ist halbeinfach, falls für jedes Linksideal L von R und für ein beliebiges Element g eines beliebigen R-Moduls G der Untermodul Lg ein Servanzuntermodul in G ist.* [14]

BEWEIS. Nehmen wir an, daß für den Ring R die Bedingung des Lemmas erfüllt ist, und es sei L ein beliebiges Linksideal in R. Betrachten wir jetzt $R_{(1)}$ als linksseitigen R-Modul, so besteht der Untermodul $H = L\cdot(0,1)$ aus sämtlichen Elementen $(l, 0)$ $(l \in L)$ und ist nach unserer Voraussetzung ein Servanzuntermodul in $R_{(1)}$. Betrachten wir jetzt das Gleichungssystem

$$(l, 0)\,x = (l, 0) \qquad (l \in L) \tag{20}$$

über H. Dies hat das Element $(0, 1) \in R_{(1)}$ zur Lösung, und so gibt es auch ein Element $(e, 0) \in H$, für welches (20) erfüllt ist. Daraus folgt, daß für $e \in L$ und für jedes $l \in L$ die Relation $le = l$ besteht, d. h. e ein rechtsseitiges Einselement in L ist, und somit R tatsächlich halbeinfach ist.

LEMMA 2. *Ist R ein halbeinfacher Ring, dann ist jeder unitäre R-Modul vollständig reduzibel.*

BEWEIS. Es sei R ein halbeinfacher Ring und G ein beliebiger unitärer R-Modul. Wir zeigen, daß jeder Untermodul H von G ein direkter Summand von G ist, und somit G auf Grund des Satzes 5 vollständig reduzibel ist. Es sei K ein, bezüglich der Eigenschaft $H \cap K = 0$ maximaler Untermodul von G. Wir zeigen, daß jedes Element g von G in der direkten Summe $H + K$ enthalten ist. Die Gesamtheit der Elemente $r \in R$ mit $rg \in H + K$ bildet ein Linksideal Q von R. Es sei e eine Rechtseinheit in Q. Dann haben der durch das Element $g - eg$ erzeugte zyklische Untermodul $R(g - eg)$ und $H + K$ als gemeinsames Element nur die 0, da für $r \in Q$ die Gleichung $r(g - eg) = 0$ und für $r \notin Q$ die Relation $r(g - eg) \notin H + K$ gilt. So haben wir wegen der K auferlegten Maximalität $Q = R$, und da G ein unitärer R-Modul ist, folgt daraus $1.g = g \in H + K$, w. z. b. w.

Nunmehr beweisen wir den folgenden Satz, der auf Grund von Satz 5 den bereits erwähnten Satz von O. GOLDMAN enthält:

[14] Man kann die Behauptung des Lemmas auch umkehren: *jeder halbeinfache Ring R genügt der im Lemma angegebenen Bedingung.* Da wir von dieser Tatsache keinen Gebrauch machen werden, gehen wir auf seinen Beweis nicht näher ein.

SATZ 6. *Ein beliebiger Ring R ist dann und nur dann halbeinfach, falls für jeden R-Modul G eine direkte Zerlegung $G = G_0 + G_1$ gilt, wo G_0 ein trivialer Untermodul des Moduls G ist, und G_1 irgendwelcher der Bedingungen* a) — g) *des Satzes* 5 *genügt.*

BEWEIS. Nehmen wir zuerst an, daß der Ring R die Eigenschaft hat, daß ein beliebiger R-Modul G von der Gestalt $G = G_0 + G_1$ ist, wo G_0 einen trivialen R-Modul bedeutet, und G_1 der Bedingung f) des Satzes 5 genügt.[15] Es ist genügend zu zeigen, daß für ein beliebiges Linksideal L von R und für jedes Element $g \in G$, der Modul Lg ein Servanzuntermodul in G ist, da in diesem Falle die Halbeinfachheit des Ringes R durch Lemma 1 gesichert wird. Es habe g auf Grund der obigen direkten Zerlegung die Darstellung

$$g = g_0 + g_1 \qquad (g_0 \in G_0).$$

Dann ist $Lg = Lg_0 + Lg_1 = Lg_1 \subseteq G_1$ und somit ist wegen f) Lg ein Servanzuntermodul in G_1, und da G_1 ein direkter Summand von G ist, ist Lg auch ein Servanzuntermodul in G.

Ist anderseits R ein halbeinfacher Ring, dann ist jeder R-Modul nach der Peirceschen Zerlegung die direkte Summe seines maximalen trivialen Untermoduls und eines unitären R-Moduls, und hier ist der unitäre direkte Summand nach Lemma 2 vollständig reduzibel.

Der soeben bewiesene Satz zeigt, daß der Begriff des halbeinfachen Ringes eine ganz natürliche und sehr wichtige Verallgemeinerung des Schiefkörperbegriffes darstellt, welche über viele wichtige Eigenschaften des Schiefkörpers verfügt. Die Bedingungen a) — g) bringen nämlich die wichtigsten Eigenschaften eines Vektorraumes über einem Schiefkörper zum Ausdruck, und über diese Eigenschaften verfügt jeder unitäre Modul mit einem halbeinfachen Ring als Operatorbereich. Mit den Eigenschaften der halbeinfachen Ringe als Operatorbereiche hängt auch die Tatsache zusammen, daß sich die klassische Theorie der linearen Gleichungssysteme von Schiefkörpern auf halbeinfache Ringe übertagen läßt [8]. Vielleicht ist diese Tatsache geeignet, ein neues Licht auf die innige Verwandtschaft zwischen Schiefkörpern und halbeinfachen Ringen zu werfen.

[15] Da nach Satz 5 die Bedingungen a) — g) äquivalent sind, genügt es, eine einzige, beliebig gewählte Bedingung ins Auge zu fassen.

§ 8. Ringtheoretische Kennzeichnungen der halbeinfachen Ringe

Als Anwendung der Sätze 5 und 6 beweisen wir den folgenden Satz, der für die Theorie der Ringe von Interesse ist:

SATZ 7. *Ein Ring R ist dann und nur dann halbeinfach, falls er*

(I) *ein rechtsseitiges Einselement besitzt und*

(II) *irgendwelcher der folgenden Bedingungen genügt:*

a′) *R ist die direkte Summe minimaler Linksideale;*[16]

b′) *es gibt in R endlich viele maximale Linksideale, die den Durchschnitt 0 haben;*

c′) *R fällt mit seinem Sockel zusammen, d. h. R ist gleich der Vereinigung seiner minimalen Linksideale;*

e′) *zu jedem Linksideal L von R gibt es in R ein Linksideal K, so daß $R^+ = L + K$ gilt;*

f′) *jedes Linksideal von R ist ein Servanzlinksideal in R;*[17]

g′) *jedes maximale unabhängige Elementensystem von R^+ über R ist eine Basis von R^+ (über R).*

BEWEIS. Vor allem bemerken wir, daß sich die Äquivalenz der Bedingungen a′) — g′) unter der Voraussetzung (I) aus Satz 5 ergibt, indem wir $G = R^+$ setzen, sowie daraus, daß aus der Bedingung b′) auf Grund des Jordan—Hölder—Schreierschen Satzes die Minimalbedingung für Linksideale folgt.

Es sei R ein Ring mit rechtsseitigem Einselement, und es sei für diesen Ring die Bedingung f′) erfüllt. Ist L ein beliebiges Linksideal in R, dann ist das Gleichungssystem $lx = l$ $(l \in L)$ in R lösbar. So gibt es auf Grund von f′) ein Element $e \in L$, für welches $le = l$ bei beliebigem $l \in L$ gilt, d. h. e ist ein rechtsseitiges Einselement von L. Damit haben wir bewiesen, daß R ein halbeinfacher Ring ist.

Umgekehrt sei R ein halbeinfacher Ring. Dann enthält jedes Linksideal von R ein rechtsseitiges Einselement. Demnach hat auch R selbst eine Rechtseinheit e. Betrachten wir jetzt das aus sämtlichen Elementen der Form $r - er$ $(r \in R)$ bestehende Linksideal L. In diesem Ideal kann wegen $s(r - er) = sr - sr = 0$ nur die Null das rechtsseitige Einselement sein, d. h. $L = 0$, und somit ist e ein zweiseitiges Einselement. So auf Grund des Satzes 6 und

[16] Aus der Bedingung (I) folgt, daß es nur endlich viele direkte Summanden gibt.

[17] Wir nennen ein Linksideal eines Ringes R ein Servanzlinksideal in R, falls es als Untermodul von R^+ ein Servanzuntermodul in R^+ ist.

unserer obigen Bemerkung bezüglich der Äquivalenz der Bedingungen a′) — g′) sind die Bedingungen a′) — g′) alle erfüllt.

Bezüglich der Bedingung d) des Satzes 5 beweisen wir den folgenden

SATZ 8. *Die folgenden beiden Bedingungen sind äquivalent:*

α) R ist ein halbeinfacher Ring;

β) R ist ein Ring mit Einselement und der linksseitige Annihilator eines jeden ($\neq 0$) Elementes von R ist der Durchschnitt von endlich vielen maximalen Linksidealen des Ringes R.

BEWEIS. Zuerst sei α) erfüllt. Dann enthält R, wie wir im Beweise des Satzes 7 gezeigt haben, ein zweiseitiges Einselement.

Weiterhin ist auf Grund des Satzes 7

$$R = A_1 + \cdots + A_k, \tag{21}$$

wo die A_i $(i = 1, \ldots, k)$ minimale Linksideale in R sind. Jedes Element r von R wird offenbar genau durch diejenigen Elemente annulliert, welche sämtliche, der Zerlegung (21) entsprechende Komponenten des betreffenden Elementes annullieren. Da nun aber diese Komponenten Elemente eines minimalen Linksideals des Ringes R sind, und der Annihilator solcher ($\neq 0$) Elemente wegen des Vorhandenseins eines Einselementes irgendein maximales Linksideal von R ist, haben wir gezeigt, daß der linksseitige Annihilator des Elementes $r \neq 0$ der Durchschnitt von endlich vielen maximalen Linksidealen von R ist. Für den Ring R ist also die Bedingung β) erfüllt.

Umgekehrt sei jetzt β) für den Ring R richtig. Da der Annihilator des Einselementes von R die 0 ist, besitzt R endlich viele maximale Linksideale, die den Durchschnitt 0 haben. Dann können wir, auf ähnliche Weise wie wir beim Beweise der Behauptung „aus d) folgt e)" des Satzes 5 bewiesen hatten, das Einselement von R als die Summe solcher Elemente darstellen, die in R minimale Linksideale erzeugen. Folglich ist auch R selbst die Summe minimaler Linksideale. Die Bedingungen (I) und c′) von Satz 7 sind also erfüllt, und folglich ist R ein halbeinfacher Ring. Damit haben wir den Beweis von Satz 8 beendet.

Es ist eine offene Frage, ob Satz 8 seine Gültigkeit behält, falls in der Bedingung β) „Einselement" durch „rechtsseitiges Einselement" ersetzt wird.

(Eingegangen am 14. März 1957.)

Literaturverzeichnis

[1] E. Artin, C. J. Nesbitt and R. M. Thrall, *Rings with minimum condition* (Ann Arbor, 1944).

[2] L. Fuchs and T. Szele, Contribution to the theory of semi-simple rings, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **3** (1952), S. 235—239.

[3] O. Goldman, A characterization of semi-simple rings with the descending chain condition, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **52** (1946), S. 1021—1027.

[4] N. Jacobson, The radical and semi-simplicity for arbitrary rings, *Amer. J. Math.*, **67** (1945), S. 300—320.

[5] I. Kaplansky, *Infinite abelian groups* (Ann Arbor, 1954).

[6] A. Kertész, Modules and semi-simple rings. I, *Publ. Math. Debrecen*, **3** (1954), S. 289—296.

[7] A. Kertész, Modules and semi-simple rings. II, *Publ. Math. Debrecen*, **4** (1956), S. 229—236.

[8] A. Kertész, The general theory of linear equation systems over semi-simple rings, *Publ. Math. Debrecen*, **4** (1955), S. 79—86.

[9] A. Kertész and T. Szele, On generalized p-groups, *Acta Univ. Debrecen*, **2** (1955), S. 131—135.

[10] А. Г. Курош, Теория групп (Москва, 1953), изд. второе.

[11] А. Г. Курош, Композиционные системы в бесконечных группах, Мат. Сборник, **16** (1945), S. 59—72.

[12] T. Szele, Simple proof of the Wedderburn—Artin structure theorem, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **5** (1954), S. 101—107.

[13] B. L. van der Waerden, *Moderne Algebra. II* (Berlin, 1931).

ÜBER DIE ANORDNUNG VON RINGEN

Von

G. GRÄTZER und E. T. SCHMIDT (Budapest)

(*Vorgelegt von* L. RÉDEI)

Es sei R ein beliebiger angeordneter Ring ohne Nullteiler und I ein Ideal von R. Offenbar induziert die Anordnung von R eine Anordnung in I. Nun stellt sich die Frage, ob die Umkehrung dieser Behauptung gilt, d. h. ob jeder Ring R ohne Nullteiler und mit einem angeordneten Ideal I $(\neq 0)$ stets angeordnet werden kann, und wenn ja, auf wieviele Weisen sich die Anordnung von I auf R fortsetzen läßt.

SATZ. *Es sei R ein Ring ohne Nullteiler und I ein von Null verschiedenes Ideal in R. Läßt I eine Anordnung zu, so kann R auf eine und nur eine Weise so angeordnet werden, daß die Anordnung von I erhalten bleibt.*[1]

BEWEIS. Nehmen wir an, daß I eine Anordnung mit dem Positivitätsbereich P zuläßt. Wir definieren eine Teilmenge Q von R folgendermaßen: $x \in R$ gehört dann und nur dann zu Q, wenn es ein $\alpha \in P$ mit $x\alpha \in P$ gibt. Wir zeigen, daß Q ein P enthaltender Positivitätsbereich in R ist.

1. Gilt $\alpha x \in P$ für ein $\alpha \in P$ und $x \in R$, so gilt $x\beta \in P$, und folglich auch $\beta x \in P$ für jedes $\beta \in P$. Da P keine Nullteiler enthält, ist $x\beta$ von Null verschieden. Wäre $-x\beta \in P$, so würde $-\alpha x\beta \in P$ gelten, aber aus $\alpha x \in P$ ergibt sich $\alpha x \beta \in P$; der Widerspruch bestätigt die Behauptung. Es folgt, daß $x \in Q$ genau dann, falls für alle $\alpha \in P$, $x\alpha$ und αx zu P gehören.

2. Für jedes Element $x \in R$ gilt genau eine der Beziehungen: $x = 0$, $x \in Q$, $-x \in Q$. Ist nämlich $x = 0$, so gilt $x \notin Q$, weil für jedes $\alpha \in P$, $x\alpha = 0 \notin P$. Sei $x \neq 0$, dann gilt für jedes $\alpha \in P$ entweder $\alpha x \in P$ oder $-\alpha x \in P$, somit gehört entweder x oder $-x$ zu Q.

3. Q ist Halbmodul. Gilt nämlich $x \in Q$, $y \in Q$, deshalb $\alpha x \in P$, $\alpha y \in P$ für jedes $\alpha \in P$, so besteht auch $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y \in P$, woraus $x+y \in Q$ folgt.

4. Q ist eine multiplikative Halbgruppe. Aus $x \in Q$, $y \in Q$ folgt $\alpha x \in P$ für jedes $\alpha \in P$, ferner auch $(\alpha x) y \in P$, deshalb $\alpha(xy) \in P$, also $xy \in Q$.

[1] Nach einer brieflichen Mitteilung von Prof. L. RÉDEI hat er einen Teil dieses Satzes bewiesen.

Da ersichtlich $P \subseteq Q$, ist Q in der Tat ein Positivitätsbereich in R, der eine solche Anordnung von R definiert, die die Anordnung von I fortsetzt.

Um die Eindeutigkeit einzusehen, nehmen wir an, daß in R noch ein Positivitätsbereich Q_1 existiert, der P enthält. Aus $x \in Q_1$ folgt offenbar $\alpha x \in P$ für jedes $\alpha \in P \subseteq Q_1$, also — nach der Definition von Q — gehört x zu Q. Umgekehrt sei $x \in Q$; wäre $-x \in Q_1$, so würde wegen des Bewiesenen $-x \in Q$ folgen, was unmöglich ist, also $x \in Q_1$. Folglich $Q = Q_1$ und somit ist der Beweis des Satzes beendet.

FOLGERUNG. *Ein Ring ohne Nullteiler läßt sich genau dann anordnen, wenn seine engste, Einselement besitzende Ringerweiterung ohne Nullteiler eine Anordnung zuläßt.*[2] *Die Anordnungen der beiden Ringe können eindeutig einander zugeordnet werden.*

Zum Schluß sei bemerkt, daß unser Satz im kommutativen Fall nichts neues behauptet, da jedes Ideal eines Integritätsbereiches R denselben Quotientenkörper wie R besitzt und die Anordnung eines Integritätsbereiches auf genau eine Weise zu einer Anordnung des Quotientenkörpers fortgesetzt werden kann.

(Eingegangen am 18. März 1957.)

[2] J. SZENDREI, On the extension of rings without divisors of zero, *Acta Sci. Math. Szeged*, **13** (1950), S. 231—234.

Technikai szerkesztő: Molnár Ferenc

A kiadásért felelős: az Akadémiai Kiadó igazgatója Műszaki felelős: Farkas Sándor

A kézirat beérkezett: 1957. III. 15. — Terjedelem: 22,75 (A/5) ív, 29 ábra

Szegedi Nyomda Vállalat 57-1011 Felelős vezető: Vincze György

The Acta Mathematica publish papers on mathematics in English, German, French and Russian.

The Acta Mathematica appear in parts of various size, making up one volume.

Manuscripts should be addressed to:

Acta Mathematica, Budapest 62, Postafiók 440.

Correspondence with the editors and publishers should be sent to the same address.

The rate of subscription to the Acta Mathematica is 110 forints a volume. Orders may be placed with „*Kultura*" Foreign Trade Company for Books and Newspapers (Budapest, VI., Magyar Ifjúság útja 21. Account No. 43-790-057-181) or with representatives abroad.

Les Acta Mathematica paraissent en français, allemand, anglais et russe et publient des mémoires du domaine des sciences mathématiques.

Les Acta Mathematica sont publiés sous forme de fascicules qui seront réunis en un volume.

On est prié d'envoyer les manuscrits destinés à la rédaction à l'adresse suivante:

Acta Mathematica, Budapest 62, Postafiók 440.

Toute correspondance doit être envoyée à cette même adresse.

Le prix de l'abonnement est de 110 forints par volume.

On peut s'abonner à l'Entreprise pour le Commerce Extérieur de Livres et Journaux „*Kultura*" (Budapest, VI, Magyar Ifjúság útja 21. Compte-courant No. 43-790-057-181) ou à l'étranger chez tous les représentants ou dépositaires.

„*Acta Mathematica*" публикует трактаты из области математических наук на русском немецком, английском и французском языках.

„*Acta Mathematica*" выходит отдельными выпусками разного объема. Несколько выпусков составляют один том.

Предназначенные для публикации рукописи следует направлять по адресу:

Acta Mathematica, Budapest 62, Postafiók 440.

По этому же адресу направлять всякую корреспонденцию для редакции и администрации.

Подписная цена „*Acta Mathematica*" — 110 форинтов за том. Заказы принимает предприятие по внешней торговле книг и газет „*Kultura*" (*Budapest, VI., Magyar Ifjúság útja 21.* Текущий счет № 43-790-057-181) или его заграничные представительства и уполномоченные.

65,— Ft.

INDEX